

Quelques Remarques sur les Opérateurs et les q -Algèbres de Banach

R. EL HARTI

*Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et Techniques
Université Hassane I, B.P. 577 Settat, Maroc*

(Presented by Jesús M.F. Castillo)

AMS Subject Class. (2000): 47A10, 46B03, 18E10

Received November 11, 2003

1. INTRODUCTION

Dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels, plusieurs auteurs manipulent souvent les q -espaces et les q -algèbres sans le savoir. Ce qui a motivé L. Waelbroeck [2] d'introduire les q -objets en 1982, en étant convaincu que leur structure joue un rôle très important en analyse fonctionnelle. Dans ce papier, on trouve plus d'informations sur les q -algèbres de Banach et les opérateurs (au sens de Waelbroeck) qui sont en fait les morphismes de la catégorie des q -espaces de Banach. Au premier lieu, nous allons préciser les notations et rappeler les définitions et les résultats connus, qui sont très utiles pour la suite.

Soit (E, F) un couple d'espaces de Banach où F est un sous-espace vectoriel de E , non nécessairement fermé dans E . L'espace F est appelé "sous-espace de Banach" si l'injection canonique $F \rightarrow E$ est continue. On désigne par $\text{Seb}(E)$ l'ensemble des sous-espaces de Banach de E .

DÉFINITION 1.1. On appelle " q -espace de Banach", tout quotient E/F d'un couple d'espaces de Banach (E, F) tel que $F \in \text{Seb}(E)$.

DÉFINITION 1.2. Etant donnés deux q -espaces de Banach E/F et E'/F' . Une application linéaire

$$u : E/F \rightarrow E'/F'$$

induite par une application linéaire continue $u_1 : E \rightarrow E'$ telle que $u_1(F) \subseteq F'$, est appelée opérateur (ou morphisme) strict. On l'appelle "un pseudo-isomorphisme" lorsque u_1 est surjective vérifiant $u_1^{-1}(F') = F$.

Dans [2], Waelbroeck définit la catégorie des q -espaces de Banach dont les objets sont les q -espaces de Banach et les morphismes sont engendrés par les opérateurs stricts et les inverses des pseudo-isomorphismes. C'est une catégorie exacte, qu'on note qB et qui possède plusieurs propriétés linéaires.

PROPOSITION 1.3. *Chaque opérateur $u : E_1/F_1 \rightarrow E_2/F_2$ dans qB est de la forme $u = u' \circ s^{-1}$ où u' est un opérateur strict et s est un pseudo-isomorphisme.*

EXEMPLES. (1) Soit $L^1[0, 1]$ l'espace des fonctions intégrables sur $[0, 1]$ muni de la norme :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \quad (f \in L^1[0, 1]),$$

et soit $C[0, 1]$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\} \quad (f \in C[0, 1]).$$

Alors le couple $(L^1[0, 1], C[0, 1])$ est un espaces de Banach quotient. Pour chaque fonction $g \in L^1[0, 1]$, considérons l'opérateur $T_g : L^1[0, 1] \rightarrow L^1[0, 1]$ défini par : $T_g(f) = g * f$ où

$$g * f(x) = \int_0^x g(x-t)f(t)dt \quad (x \in [0, 1]).$$

Nous savons bien que $C[0, 1]$ est un idéal dense dans $L^1[0, 1]$ muni du produit de convolution. Comme $\|T_g(f)\| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ pour tout $f \in L^1[0, 1]$, T_g est continue, envoie $C[0, 1]$ dans $C[0, 1]$ et induit un morphisme strict

$$\tilde{T}_g : L^1[0, 1]/C[0, 1] \rightarrow L^1[0, 1]/C[0, 1].$$

D'autre part, on peut remplacer le produit de convolution par le produit ordinaire et choisir $g \in C[0, 1]$ telle que $|g(x)| \neq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$; dans ce cas, T_g est une bijection qui vérifie

$$T_g^{-1}(C[0, 1]) = C[0, 1]$$

et induit donc un pseudo-isomorphisme

$$\overline{T}_g : L^1[0, 1]/C[0, 1] \rightarrow L^1[0, 1]/C[0, 1]$$

dont l'inverse est un morphisme d'espace de Banach quotients.

(2) Soit $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$ et soit A l'algèbre du disque (l'espace des fonctions continues sur D et holomorphes à l'intérieur du D), muni de la norme :

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| : x \in D\} \quad (f \in A).$$

On munit A de la norme suivante :

$$\|f\|_0 = \sup\{|f(1/n)| : n \geq 1\} \quad (f \in A).$$

Soit \hat{A} l'algèbre complétée de A pour cette norme. Alors (\hat{A}, A) est un espace de Banach quotient. Considérons maintenant l'opérateur $T : A \rightarrow A$ défini par :

$$T(f)(z) = z \cdot f(z) \quad (f \in A, z \in D).$$

Alors T possède une extension $\hat{T} : \hat{A} \rightarrow \hat{A}$ qui induit donc un morphisme $\tilde{T} : \hat{A}/A \rightarrow \hat{A}/A$ d'espace de Banach de quotient.

Dans la suite, nous montrons qu'une application linéaire entre deux q-espaces de Banach est un opérateur si, et seulement si, son graphe relevé est un sous espace de Banach (voir le théorème 3.2). Nous montrons aussi que les opérateurs sur un q-espace de Banach standard forment une q-algèbre de Banach puis nous prouvons que le spectre d'un opérateur sur un q-espace de Banach est un compact non vide.

2. CARACTÉRISATION DES OPÉRATEURS DE qB

Soit E/F un q-espace de Banach. Le théorème du graphe fermé garantit l'unicité de la topologie de F pour laquelle $F \in \text{Seb}(E)$. Si $v : E \rightarrow E'$ est une application linéaire continue d'espaces de Banach, alors l'image directe et l'image réciproque d'un sous espace de Banach est un sous espace de Banach, ainsi la somme et l'intersection de deux sous espaces de Banach sont des sous espaces de Banach. Avec ces remarques, on peut montrer les résultats suivants :

PROPOSITION 2.1. *Soient E_1/F_1 et E_2/F_2 deux q-espaces de Banach et soit $u : E_1/F_1 \rightarrow E_2/F_2$ une application linéaire. Le graphe relevé $G_0(u) = \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 : x_2 + F_2 \in u(x_1 + F_1)\}$, possède les propriétés suivantes :*

- (a) *Le graphe $G(u)$ de u est isomorphe à $G_0(u)/F_1 \times F_2$.*
- (b) *Si $u' : E_2/F_2 \rightarrow E_3/F_3$ est une autre application linéaire et si $G_0(u) \in \text{Seb}(E_1 \times E_2)$ et $G_0(u') \in \text{Seb}(E_2 \times E_3)$, alors*

$$G_0(u' \circ u) \in \text{Seb}(E_1 \times E_3).$$

Preuve. (b) Remarquons que l'ensemble

$$G_0 = \{((x_1, x_2), (x_2, x_3)) \in G_0(u) \times G_0(u')\}$$

est fermé dans $G_0(u) \times G_0(u')$ et $G_0(u' \circ u)$ est l'image de G_0 par la projection canonique $((x_1, x_2), (x_2, x_3)) \rightarrow (x_1, x_3)$, il en résulte que $G_0(u' \circ u) \in \text{Seb}(E_1 \times E_3)$. ■

PROPOSITION 2.2. *Soit $u : E_1/F_1 \rightarrow E_2/F_2$ une application linéaire bijective entre deux q -espaces de Banach telle que $G_0(u) \in \text{Seb}(E_1 \times E_2)$, alors $G_0(u^{-1}) \in \text{Seb}(E_2 \times E_1)$.*

Preuve.

$$\begin{aligned} G_0(u^{-1}) &= \{(x_2, x_1) \in E_2 \times E_1 : x_1 \in u^{-1}(x_2 + F_2)\} \\ &= \{(x_2, x_1) \in E_2 \times E_1 : x_2 \in u(x_1 + F_1)\} = G_0(u). \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $G_0(u^{-1}) \in \text{Seb}(E_2 \times E_1)$. ■

PROPOSITION 2.3. *Le graphe relevé $G_0(u)$ d'un morphisme strict $u : E_1/F_1 \rightarrow E_2/F_2$ est dans $\text{Seb}(E_1 \times E_1)$.*

Preuve. Soit $u_1 : E_1 \rightarrow E_2$ le morphisme qui induit u et soit $j : E_1 \times E_2 \rightarrow E_2$ l'application linéaire continue définie par :

$$j(x_1, x_2) \rightarrow x_2 - u_1(x_1).$$

Alors,

$$\begin{aligned} j^{-1}(F_2) &= \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 : x_2 - u_1(x_1) \in F_2\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 : x_2 \in u_1(x_1) + F_2\} = G_0(u). \end{aligned}$$

Nous avons donc $G_0(u) \in \text{Seb}(E_1 \times E_2)$. ■

Il résulte des propositions ci-dessus que le graphe relevé d'un opérateur de q -espaces de Banach est un sous espace de Banach et donc son Graphe est un q -espace de Banach.

THÉORÈME 2.4. *Soit $u : E_1/F_1 \rightarrow E_2/F_2$ une application linéaire entre deux q -espaces de Banach. Alors, u est un opérateur de qB si, et seulement si, son graphe $G(u)$ est q -espace de Banach.*

Preuve. Il reste à prouver que si $G_0(u) \in \text{Seb}(E_1 \times E_2)$, alors u est un opérateur de q-espaces de Banach. En effet : Considérons les projections $\pi_{11} : G_0(u) \rightarrow E_1, (x_1, x_2) \rightarrow x_1$ et $\pi_{21} : G_0(u) \rightarrow E_2, (x_1, x_2) \rightarrow x_2$, et remarquons que π_{11} est une surjection qui vérifie :

$$\pi_{11}(F_1 \times F_2) \subseteq F_2 \quad \text{et} \quad \pi_{11}^{-1}(F_2) = F_1 \times F_2$$

et que π_{21} vérifie

$$\pi_{21}(F_1 \times F_2) \subseteq F_2;$$

π_{11} induit alors un pseudo-isomorphisme $\pi_1 : G_0(u)/F_1 \times F_2 \rightarrow E_1/F_1$ et π_{21} induit un morphisme strict $\pi_2 : G_0(u)/F_1 \times F_2 \rightarrow E_2/F_2$ tels que $u = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$. ■

3. LES q-ALGÈBRES DE BANACH

Soient $(A, \|\cdot\|_A)$ une algèbre de Banach, associative et unitaire et I un idéal bilatère de A . Nous supposons que I muni d'une norme $\|\cdot\|_I$ et que l'une de ces deux propriétés est satisfaite :

- (a) I un sous espace de Banach de A ;
- (b) la norme de I est une norme d'idéal :

$$\|xa\|_I \leq \|x\|_I \|a\|_A \quad \text{et} \quad \|ax\|_I \leq \|a\|_A \|x\|_I \quad (x \in I, a \in A).$$

Alors, I est appelé un idéal de Banach de A et le quotient A/I est appelé "q-algèbre de Banach".

Remarque. Les théorèmes de Banach-Steinhaus et du graphe fermé montrent que les propriétés (a) et (b) sont équivalentes.

DÉFINITION 3.1. Soit $a + I = (a_1 + I, \dots, a_n + I)$ une famille d'éléments de A/I . On appelle spectre simultané de $a + I$, noté $\text{sp}_I(a)$, l'ensemble des éléments $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de \mathbb{C}^n vérifiant :

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_k - (a_k))A + I \neq A.$$

Remarquons qu'il est possible de définir le spectre $a + I$ en introduisant les caractères de l'algèbre .

PROPOSITION 3.2. Soit A/I une algèbre de Banach quotient, commutative et unitaire. Pour tout $a + I \in A/I$, nous avons :

$$\text{sp}_I(a) = \{(\chi(a_1), \dots, \chi(a_n)) \in \mathbb{C}^n : \chi \in \text{Hull}(I)\},$$

où (a_1, \dots, a_n) est un représentant de $a + I$ et $\text{Hull}(I)$ est l'ensemble des idéaux maximaux qui contiennent I .

Preuve. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \text{sp}_I(a)$, comme

$$1 \notin \sum_{k=1}^n (a_k - \lambda_k)A + I,$$

il existe un caractère χ tel que $\sum_{k=1}^n (\lambda_k - a_k)A + I \subseteq \ker \chi$. Ceci prouve que $I \subseteq \ker \chi$ et que $\chi(a_k) = \lambda_k$, $k = 1, \dots, n$.

Inversement, si $\chi \in \text{Hull}(I)$, alors $\sum_{k=1}^n (\chi(a_k) - a_k)A + I \subseteq \ker \chi$ et par conséquent $(\chi(a_1), \chi(a_2), \dots, \chi(a_n)) \in \text{sp}_I(a)$. ■

En remarquant que $\text{Hull}(I) = \text{Hull}(\bar{I})$, nous avons :

COROLLAIRE 3.3. Le spectre $\text{sp}_I(a)$ est un compact, non vide.

4. SPECTRE D'UN OPÉRATEUR ET LES q-ALGÈBRES D'OPÉRATEURS

Soit E/F un espace de Banach quotient. On désigne par $L(E/F)$ l'algèbre des opérateurs (des morphismes de q-espaces de Banach) de E/F et par $S(E/F)$ la sous algèbre de $L(E/F)$, engendrée par les opérateurs stricts de E/F .

DÉFINITION 4.1. Soit $T \in L(E/F)$. On appelle spectre de T , noté $\text{sp}_L(T)$, l'ensemble des valeurs λ dans \mathbb{C} telles que $\lambda - T$ est non algébriquement inversible.

DÉFINITIONS ET REMARQUES 4.2. (i) Un opérateur $T \in L(E/F)$ est inversible dans qB si, et seulement si, il est algébriquement inversible (voir la proposition 2.1).

(ii) Un pseudo-isomorphisme, qui est en particulier un isomorphisme algébrique, est un isomorphisme dans qB. Un espace de Banach E est dit "libre" si $E \cong \ell_1(X)$. On peut associer à chaque q-espace de Banach E/F , un q-espace de Banach standard E'/F' (E' est libre) et un pseudo-isomorphisme

$S : E'/F' \rightarrow E/F$. Donc, chaque q-espace de Banach E/F est isomorphe à un q-espace de Banach standard E'/F' . D'autre part, tout opérateur d'un q-espace de Banach standard est nécessairement strict (voir [2]). Il en résulte que si $T \in L(E/F)$, alors

$$\text{sp}_L(T) = \text{sp}_L(S^{-1} \circ T \circ S) = \text{sp}_S(S^{-1} \circ T \circ S),$$

où $\text{sp}_S(S^{-1} \circ T \circ S)$ est le spectre de $S^{-1} \circ T \circ S$ dans $S(E'/F')$.

Ainsi, nous pouvons supposer que T est strict et que E/F est standard pour montrer les résultats suivants .

PROPOSITION 4.3. *Le spectre d'un opérateur T sur un q-espace de Banach E/F , est non vide.*

Preuve. Comme nous avons mentionner ci-dessus, nous pouvons supposer que tous les opérateurs sont stricts. Remarquons que $S(E/F)$ n'est autre qu'une q-algèbre de Banach A/I où A est l'algèbre des opérateurs bornées de E , qui laissent invariant F et I est exactement l'idéal bilatère de A formé par les opérateurs bornées de E dans F .

A est une algèbre de Banach pour la norme

$$\|T\|_A = \sup\{\|Tx\|_E, \|Ty\|_F : \|x\|_E \leq 1, \|y\|_F \leq 1\} \quad (T \in A),$$

et I est une sous algèbre de Banach avec la norme

$$\|u\|_I = \sup\{\|ux\|_F : \|x\|_F \leq 1\} \quad (u \in I).$$

Puisque $E \neq F$, $\|T \circ u\|_I \leq \|T\|_A \|u\|_I$ et $\|u \circ T\|_I \leq \|u\|_I \|T\|_A$, pour tous $T \in A$ et $u \in I$, nous avons $A \neq I$ et A/I est une q-algèbre de Banach. Sachant que I est non dense dans A , nous considérons la projection canonique $\pi : A/I \rightarrow A/\bar{I}$ de l'algèbre de Banach quotient A/I dans l'algèbre de Banach A/\bar{I} . Comme π est un homomorphisme surjectif et $\text{sp}_{\bar{I}}(\pi(T)) \neq \emptyset$, nous avons

$$\text{sp}_{\bar{I}}(\pi(T)) \subseteq \text{sp}_I(T) \neq \emptyset.$$

■

PROPOSITION 4.4. *Soit $T \in S(E/F)$, induit par T_0 . Alors*

$$\text{sp}_L(T) \subseteq \text{sp}(T_0/E) \cup \text{sp}(T_0/F)$$

Preuve. Soit $\lambda \notin \text{sp}(T_0/E) \cup \text{sp}(T_0/F)$. Si $x + F \in E/F$ tel que $(1 - T)(x + F) = F$ alors $(1 - T_0)x \in F$. Comme $(1 - T_0)$ est inversible dans $L(F)$, il existe $x' \in F$ tel que $(1 - T_0)x' = (1 - T_0)x$ et puisque $(1 - T_0)$ est inversible dans $L(E)$, nous avons $x = x'$, donc $x \in F$; ce qui prouve que $(1 - T)$ est injectif.

Soit maintenant $y + F \in E/F$. Comme $(1 - T_0)$ est inversible dans $L(E)$, il existe x dans E tel que $(1 - T_0)x = y$. Nous avons bien

$$(1 - T)(x + F) = (1 - T_0)x + F = y + F.$$

Il en résulte que $1 - T$ est inversible et que $\lambda \in \text{sp}_L(T)$. ■

Le spectre d'un opérateur sur un q-espace de Banach est donc borné, il reste à vérifier qu'il est fermé. Pour cela, nous avons besoin de montrer les lemmes suivants.

LEMME 4.5. Soient $T \in L(E/F)$ et C_T le complexe des sous espaces de Banach suivant

$$(C_T) : 0 \xrightarrow{I} F \times F \xrightarrow{I_T} G_0(T) \times E \times F \xrightarrow{J_T} E \times E \xrightarrow{J} 0$$

où

$$\begin{aligned} I_T(x_0, y_0) &= ((x_0, y_0), (-x_0, -y_0)) \\ J_T((x, y), (x', y_0)) &= (x + x', y + y_0) \end{aligned}$$

pour tous x_0, y_0 dans F , tout x' dans E et tout (x, y) dans $G_0(T)$. Alors T est inversible dans $L(E/F)$ si et seulement si C_T est une suite exacte.

Preuve. Supposons que T est inversible et montrons que $\ker J_T \subseteq \text{im } I_T$ et que J_T est un opérateur surjectif. Soit

$$((x, y), (x', y_0)) \in G_0(T) \times E \times F$$

tel que

$$x + x' = 0 \quad \text{et} \quad y + y_0 = 0.$$

Comme T est inversible et $y = -y_0 \in F$, $x \in F$ et donc $((x, y), (x', y_0)) \in \text{im } I_T$. D'autre part, soit $(x', y') \in E \times E$. Il existe $x \in E$ tel que $y' \in T(x + F)$. Nous avons bien

$$J_T((x, y'), (x' - x, 0)) = (x', y').$$

Inversement, supposons que C_T est une suite exacte. Soit $x \in E$ tel que $T(x + F) = y_0 \in F$. Puisque

$$\ker J_T = \text{im } I_T \quad \text{et} \quad J_T((x, y_0), (-x, -y_0)) = (0, 0),$$

$x \in F$ et donc T est injectif. Soit maintenant $y' \in E$, comme J_T est surjectif, il existe $(x, y) \in G_0(T)$ et $(x', y_0) \in E \times F$ tel que $J_T((x, y), (x', y_0)) = (0, y')$, i.e., $x = x' = 0$ et $y + y_0 = y'$. Ceci montre que $y' \in T(x + F)$ donc T est surjectif. ■

LEMME 4.6. *Soit $T \in S(E/F)$. Pour tout $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que C_{λ_0-T} est un complexe exact de sous espaces des Banach, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\lambda \in \mathbb{C}$ et vérifie $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, alors le complexe $C_{\lambda-T}$ sera exact.*

Preuve. En vérifiant que

$$d(I_{\lambda_0}, I_\lambda) < 2|\lambda - \lambda_0| \quad \text{et} \quad d(J_{\lambda_0}, J_\lambda) < 2|\lambda - \lambda_0| \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

où d est l'écart défini dans [1], les hypothèses du théorème de Taylor [3, Théorème 2-1] se confirment et donc le lemme ci-dessus n'est qu'un cas particulier. ■

Il résulte alors des résultats ci-dessus que le spectre d'un opérateur sur un espace de Banach quotient, est un compact non vide.

RÉFÉRENCES

- [1] KATO, T., "Perturbation Theory for Linear Operators", Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [2] WAELBROECK, L., "Quotient Banach Spaces", Banach Center Publications, Volume 8, Warsaw, 1982.
- [3] TAYLOR, J.L., A joint spectrum for several commuting operators, *J. Funct. Anal.* **6** (1970), 172–191.