II-1.- ECUACION DE BOLTZMANN.LEYES DE CONSERVACION

El estudio de los fenómenos de transporte puede decirse que empieza en 1872 cuando Boltzmann deduce la primera ecuación cinética en la historia de la Mecánica Estadística. Esta obtención se encuentra a mitad de camino entre una teoría estocástica fenomenológica y una teoría dinámica rigurosa; y a partir de ella podemos obtener toda la información, tanto espacial como temporal, acerca de la evolución del sistema. En sí, es una ecuación integro-diferenciable no lineal para la función de distribución reducida, y tiene la forma:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\,\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\,\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \int_{\vec{v}_1}\int_{\Omega} d^3\vec{v}_1\, d\Omega\, |\vec{v}-\vec{v}_1|\, \sigma(\Omega)\,\left(f' f_1' - f f_1\right) \qquad \text{(II-1,1)}$$

en donde hemos empleado la notación:

$f \equiv f(\vec{r},\vec{v};t)$

$f_1 \equiv f(\vec{r},\vec{v}_1;t)$

$f' \equiv f(\vec{r},\vec{v}';t)$

$f_1' \equiv f(\vec{r},\vec{v}_1';t)$

y $\sigma(\Omega)$ es la sección eficaz diferencial para la colisión: $\{\vec{v},\vec{v}_1\} \longrightarrow \{\vec{v}',\vec{v}_1'\}$

$\vec{F}$: Fuerza exterior aplicada al sistema.

Cabe resaltar que para poder lograr esta ecuación, se han debido hacer previamente una serie de hipótesis[1], que son:

a) El gas está lo suficientemente diluído como para que sólo tengamos en cuenta los choques entre dos partículas.

b) La Fuerza externa $\vec{F}$ no influye sobre el valor de la sección eficaz.

c) La función de distribución $f(\vec{r},\vec{v};t)$ no varía apreciablemente durante un intervalo de tiempo del orden de la duración de una colisión molecular; y tampoco varía en una distancia del orden del radio de acción de las fuerzas intermoleculares.

d) La llamada hipótesis del "caos molecular", por la que en esta teoría se desprecian las posibles correlaciones entre las velocidades iniciales de dos moléculas antes de que se produzca la colisión. Esta justificada si la densidad del gas es lo suficientemente baja, ya que en este caso el camino libre medio ℓ es mucho mayor que el alcance de las fuerzas intermoleculares y dos moléculas antes de encontrarse están separadas a una distancia ℓ con lo que están lo suficientemente lejos como para que una correlación entre sus velocidades iniciales sea improbable.

Para poder obtener algunas propiedades asociadas con esta ecuación, señalemos algunas relaciones generales en torno a la función de distribución $f(\vec{r},\vec{v};t)$.

Sea $n(\vec{r};t)\,d^3r$ el número medio de moléculas (cualquiera que sea su velocidad) que en el instante t están situadas entre $\vec{r}$ y $\vec{r}+d\vec{r}$, y que definimos por:

$$n(\vec{r};t) = \int d^3\vec{v}\; f(\vec{r},\vec{v};t)$$

Si $\chi(\vec{r},\vec{v};t)$ es una función que denota una propiedad de una molécula situada en el instante t cerca de $\vec{r}$ con una velocidad próxima a $\vec{v}$. El valor medio de χ en el instante t en la posición $\vec{r}$, vendrá dado por:

$$\langle \chi(\vec{r};t)\rangle \equiv \overline{\chi}(\vec{r};t) \equiv \frac{1}{n(\vec{r};t)}\int d^3\vec{v}\; f(\vec{r},\vec{v};t)\;\chi(\vec{r},\vec{v};t)$$

Así $\vec{u}(\vec{r};t)$ velocidad media del flujo del gas en un punto ("velocidad hidrodinámica") vendrá dada por:

$$\vec{u}(\vec{r};t) \equiv \langle \vec{v}(\vec{r};t)\rangle \equiv \frac{1}{n(\vec{r};t)}\int d^3\vec{v}\; f(\vec{r},\vec{v};t)\cdot\vec{v}$$

Es interesante, calcular el flujo neto de la propiedad χ transportada en una determinada dirección, $\mathcal{E}_n(\vec{r};t)$; cuya definición más correcta es la de valor neto de χ transportado por unidad de tiempo y por unidad de área. Se puede ver que por razonamientos de tipo estadístico[1] se define este $\mathcal{E}_n$ como:

$$\mathcal{E}_n \equiv \vec{n}\cdot\vec{\mathcal{E}}$$

donde $\vec{\mathcal{E}}$ se considera como un vector Flujo dado por: $\vec{\mathcal{E}} = n\,\langle \vec{V}\chi\rangle$ y en el que $\vec{V} \equiv \vec{v}-\vec{u}$ es la llamada velocidad peculiar, que no es más que la velocidad de una molécula respecto a la velocidad media en el fluido. Así de esta forma $\mathcal{E}_n(\vec{r};t)$ puede ser considerada como la componente $\vec{n}$ de un vector flujo $\vec{\mathcal{E}}$.

Hemos logrado definir variables macroscópicas a partir de variables microscópicas, por lo que ya estamos en condiciones de obtener una descripción hidrodinámica o continua del problema. Nuestro objetivo consiste en obtener desde el punto de vista de la ecuación de Boltzmann ecuaciones análogas a las de balance hidrodinámico clásico, para así relacionar los invariante mecánicos del sistema (descripción macroscópica) con los llamados invariantes COLISIONALES (descripción microscópica).

Sea $\chi(\vec{r},\vec{v})$ alguna cantidad relacionada con la velocidad $\vec{v}$ de una molécula localizada en $\vec{r}$. Si en $\vec{r}$ se produce una colisión del tipo: $\{\vec{v},\ \vec{v}_1\} \longrightarrow \{\vec{v}',\ \vec{v}_1'\}$,en donde las variables con prima son los valores que toman estas después de la colisión; se dice que $\chi(\vec{v})$ es un INVARIANTE COLISIONAL si[2]:

$$\chi(\vec{v}) + \chi(\vec{v}_1) = \chi(\vec{v}') + \chi(\vec{v}_1')$$

Estas funciones van a estar directamente relacionadas con magnitudes que se conservan en una colisión, como son la masa, la cantidad de movimiento y la energía del sistema.

Calculemos el siguiente término para estas funciones:

$$\int d^3\vec{v} \int d^3\vec{v}_1 \int d\Omega\ \sigma(\Omega)\ |\vec{v}-\vec{v}_1| \cdot \chi \cdot (f'f_1' - f f_1) \tag{II-1,2}$$

Haciendo uso de las propiedades de simetría[1] de σ , efectuamos los siguientes cambios de variables en (II-1,2):

$$\vec{v} \longrightarrow \vec{v}_1 \quad ; \quad \vec{v}_1 \rightarrow \vec{v} \qquad (*)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{v}_1 \rightarrow \vec{v}_1' \\ \vec{v}_1' \rightarrow \vec{v}_1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} \vec{v} \rightarrow \vec{v}' \\ \vec{v}' \rightarrow \vec{v} \end{array}\right\} \ (**)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{v}_1 \longrightarrow \vec{v}' \\ \vec{v}' \longrightarrow \vec{v}_1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} \vec{v} \rightarrow \vec{v}_1' \\ \vec{v}_1' \rightarrow \vec{v} \end{array}\right\} \ (***)$$

En (*) no se altera el valor de la integral y en (**), (***) hay un cambio de signo. Añadiendo a (II-1,2) estas expresiones y dividiendo por 4, tendremos la siguiente identidad:

$$\int d^3\vec{v} \int d^3\vec{v}_1 \int d\Omega\ \sigma(\Omega)\ |\vec{v}-\vec{v}_1| \cdot \chi \cdot (f'f_1' - f f_1) = \frac{1}{4} \int d^3\vec{v} \int d^3\vec{v}_1 \int d\Omega\, \sigma(\Omega)\, |\vec{v}-\vec{v}_1| \cdot$$
$$\cdot\, (f'f_1' - f f_1) \cdot \left(\chi(\vec{v}) + \chi(\vec{v}_1) - \chi(\vec{v}') - \chi(\vec{v}_1') \right) = 0 \tag{II-1,3}$$

debido a la definición de $\chi(\vec{v})$.

Si multiplicamos la ecuación de Boltzmann por χ e integramos sobre $\vec{v}$:

$$\int d^3\vec{v}\ \chi(\vec{v}) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{m} F_\alpha \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \right) f(\vec{r},\vec{v};t) = 0 \tag{II-1,4}$$

en donde el término de colisión desaparece por (II-1,3) y en el que hemos utilizado el convenio de suma de índices. $-\int d^3\vec{v} \left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t}\right) f$

Reescribiendo (II-1,4) en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d^3\vec{v}\, \mathcal{X} f + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int d^3\vec{v}\, \mathcal{X} v_\alpha f - \int d^3\vec{v}\, \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x_\alpha} v_\alpha f + \frac{1}{m}\int d^3\vec{v}\, \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left(\mathcal{X} F_\alpha f\right)$$

$$- \frac{1}{m}\int d^3\vec{v}\, \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial v_\alpha} F_\alpha f - \frac{1}{m}\int d^3\vec{v}\, \mathcal{X} \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\alpha} f = 0$$

(II-1,5)

El cuarto término desaparece si $f(\vec{r},\vec{v};t)$ se supone se hace cero cuando $|\vec{v}| \to \infty$. Ahora bien, teniendo en cuenta la definición de valor medio dado anteriormente la ecuación (II-1,5) se transforma:

$- n \left\langle \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} \right\rangle$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n\mathcal{X}\rangle + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\langle n v_\alpha \mathcal{X}\rangle - n\left\langle v_\alpha \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x_\alpha}\right\rangle - \frac{n}{m}\left\langle F_\alpha \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial v_\alpha}\right\rangle$$

$$- \frac{n}{m}\left\langle \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\alpha}\mathcal{X}\right\rangle = 0$$

(II-1,6)

en donde $\langle nA\rangle = n\langle A\rangle$, ya que n es independiente de $\vec{v}$.

Es el llamado TEOREMA DE CONSERVACION , que como vamos a ver va a ser análogo a las ecuaciones que rigen la hidrodinámica clásica.

Queda ahora por ver qué funciones son los llamados invariantes colisionales. Se puede mostrar[2,3] que la solución general es una combinación lineal de cinco invariantes que son linealmente independientes[3,4] :

$$\mathcal{X}(\vec{v}) = \sum_{\alpha=1,..,5} A_\alpha \mathcal{X}_\alpha(\vec{v})$$

donde estas cinco funciones corresponden a magnitudes que se conservan en una colisión, como son la masa, la cantidad de movimiento lineal y la energía térmica.

$$\mathcal{X}_1(\vec{v}) \equiv m \quad ; \quad \mathcal{X}_{2,3,4}(\vec{v}) \equiv m v_i \;(i=2,3,4) \quad ; \quad \mathcal{X}_5(\vec{v}) \equiv \frac{1}{2} m \left|\vec{v} - \vec{u}(\vec{r},t)\right|^2$$

Cualquier otra función que puede ser un invariante es una combinación lineal de estas cinco funciones. Hemos de indicar[5] que los invariantes colisionales obtenidos, lo son con toda rigurosidad en el llamado "límite hidrodinámico", en el que las variables intensivas varían muy poco sobre una longitud del orden del recorrido libre medio; ya que nos basamos en una teoría cinética en donde las colisiones están localizadas, se realizan en el mismo punto. En una teoría cinética más refinada en donde se tuviera en cuenta la deslocalización de la colisión, pudiera ser que algún invariante dejara de serlo; sin violar claro está las leyes de conservación dinámicas. Por otra parte hay que señalar que la ecuación (II-1,6) es muy general, ya que depende solamente de las leyes de conservación, de ahí que puedan resultar válidas, incluso, para aquellos sistemas en donde no sea aplicable la ecuación de Boltzmann.

Para cada uno de los invariantes, se obtiene una ley de conservación.

a) CONSERVACION DE LA MASA.

Si $\chi \equiv m$, por (II-1,6):

$$\frac{\partial}{\partial t}(m n) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\langle m n v_\alpha \rangle = 0$$

introduciendo la densidad de masa $\rho(\vec{r};t) \equiv m\, n(\vec{r};t)$, y sacando fuera del corchete $m \cdot n$ obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_\alpha) = 0$$

o en notación vectorial de la divergencia:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho \vec{u}) = 0 \qquad \text{(II-1,7)}$$

que es la llamada "ecuación de continuidad" de hidrodinámica. Expresa la condición macroscópica necesaria para garantizar la conservación de la masa.

b) CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.

Si $\chi \equiv m v_\alpha$ .Por (II-1,6):

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n m v_\beta \rangle + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\langle n m v_\alpha v_\beta \rangle = \frac{n}{m}\left\langle F_\alpha \cdot m \cdot \frac{\partial v_\beta}{\partial v_\alpha}\right\rangle$$

Si F_α es independiente de la velocidad v_α . Pero:

$$F_\alpha \cdot \frac{\partial v_\beta}{\partial v_\alpha} = F_\alpha \delta_{\alpha\beta} = F_\beta$$

de ahí que la ecuación quede en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_\beta) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\rho \langle v_\alpha v_\beta \rangle\right) = \frac{1}{m}\rho F_\beta \qquad \text{(II-1,8)}$$

Ahora bien, de acuerdo a la definición de velocidad peculiar:

$$\vec{V} \equiv \vec{v} - \vec{u} \quad ; \quad \vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$$

$$\langle v_\alpha v_\beta \rangle = \langle (u_\alpha + V_\alpha)(u_\beta + V_\beta) \rangle = \langle u_\alpha u_\beta + u_\alpha V_\beta + V_\alpha u_\beta + V_\alpha V_\beta \rangle =$$

$$= u_\alpha u_\beta + \langle V_\alpha V_\beta \rangle$$

ya que $\langle u_\alpha V_\beta \rangle = u_\alpha \langle V_\beta \rangle = 0$

Sustituyendo esto en la ecuación (II-1,8), queda:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_\beta) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_\alpha u_\beta) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho \langle V_\alpha V_\beta \rangle) = \frac{1}{m} \rho F_\beta$$

definiendo el TENSOR DE PRESION:

$$P_{\alpha\beta} \equiv \rho \langle V_\alpha V_\beta \rangle \qquad \text{(II-1,9)}$$

en donde claramente se ve que: $P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}$

así la expresión resultante es:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_\beta) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_\alpha u_\beta) = -\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{m} \rho F_\beta$$

Es la ecuación de Euler (I-2,16) de la hidrodinámica macroscópica. Se puede poner de una forma más clara volviendo a escribir el primer miembro y desarrollándolo:

$$u_\beta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_\beta}{\partial t} + u_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_\alpha) + \rho u_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} = u_\beta \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_\alpha)\right] +$$

$$+ \rho \left[\frac{\partial u_\beta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right] = 0 + \rho \frac{d u_\beta}{dt}$$

En donde hemos tenido en cuenta la ecuación (II-1,7) y donde hemos hecho uso de la definición de derivada sustancial de cualquier función $\phi(\vec{r},t)$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}$$

y consideramos la variación temporal cuando nos movemos con la velocidad del fluido $\vec{u}$. Con todo ello la ecuación final resulta:

$$\rho \frac{d u_\beta}{dt} = -\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{m} \rho F_\beta \qquad \text{(II-1,10)}$$

Expresa físicamente el hecho de que la velocidad de variación de la cantidad de movimiento media de cualquier elemento de fluidose debe a las tensiones (incluyendo la presión ordinaria) del fluido que le rodea; así como las fuerzas exteriores que actúan sobre el mismo.

Recordando la definición de la componente del vector Flujo $\vec{\tau}$, vemos que el tensor de Presión tiene una forma análoga; de ahí que se pueda afirmar que $\mathbf{P}$ representa el flujo de la cantidad de movimiento de las moléculas, calculado en una referencia que se mueve a la velocidad del fluido $\vec{u}$. El término "tensor de presión" está justificado debido a que en el equilibrio define la presión escalar hidrostática, como el flujo de momento a través de una superficie unidad en dirección perpendicular a dicha superficie

c) CONSERVACION DE LA ENERGIA

Si $\chi \equiv \frac{1}{2} m |\vec{v}-\vec{u}|^2$ $\quad \frac{\partial V^2}{\partial t} = -2V_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \quad \int d\vec{v} \frac{\partial \chi}{\partial v_\alpha} f \sim m \int d\vec{v}\, V_\alpha f = 0$

De (II-1,6) obtenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho |\vec{v}-\vec{u}|^2 \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \langle \rho v_\alpha |\vec{v}-\vec{u}|^2 \rangle - \frac{1}{2} \rho \langle v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} |\vec{v}-\vec{u}|^2 \rangle = 0 \qquad \text{(II-1,11)}$$

definimos la temperatura por: $K_B T \equiv \Theta \equiv \frac{1}{3} m \langle |\vec{v}-\vec{u}|^2 \rangle$

y la densidad de corriente calorífica por: $\vec{q} \equiv n \langle \frac{1}{2} m |\vec{v}-\vec{u}|^2 (\vec{v}-\vec{u}) \rangle$

Vamos a desarrollar la ecuación (II-1,11). En primer lugar:

$$\frac{1}{2} \rho \langle v_\alpha |\vec{v}-\vec{u}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \rho \langle (v_\alpha - u_\alpha) |\vec{v}-\vec{u}|^2 \rangle + \frac{1}{2} \rho\, u_\alpha \langle |\vec{v}-\vec{u}|^2 \rangle =$$

$$= q_\alpha + \frac{3}{2} n K_B T u_\alpha = q_\alpha + \frac{3}{2} n \Theta u_\alpha$$

de acuerdo con las definiciones dadas anteriormente.

Por otra parte:

$$\frac{1}{2} \rho \langle v_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} |\vec{v}-\vec{u}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \rho \langle v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (v_\beta - u_\beta)(v_\beta - u_\beta) \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \rho \langle v_\alpha \cdot \left(- \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} (v_\beta - u_\beta) - \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} (v_\beta - u_\beta) \right) \rangle = \frac{1}{2} \rho \langle -2 v_\alpha (v_\beta - u_\beta) \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \rangle =$$

$$= - \rho \langle v_\alpha (v_\beta - u_\beta) \rangle \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \qquad \text{(II-1,12)}$$

Pero: $\langle v_\alpha (v_\beta - u_\beta) \rangle = \langle (v_\alpha - u_\alpha)(v_\beta - u_\beta) \rangle + u_\alpha \langle v_\beta - u_\beta \rangle = \langle (v_\alpha - u_\alpha)(v_\beta - u_\beta) \rangle$

ya que $\langle v_\beta - u_\beta \rangle = \langle v_\beta \rangle - u_\beta = 0$

De ahí que la expresión anterior (II-1,12):

$$-\rho \langle v_\alpha (v_\beta - u_\beta) \rangle \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} = -P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}$$

Ahora bien, por la simetría de $P_{\alpha\beta}$:

$$P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} = P_{\alpha\beta} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) = P_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}$$

donde

$$D_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right)$$

La ecuación resultante:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t}(n\theta) + \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(n\theta u_\alpha) + P_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{(II-1,13)}$$

con lo que: $\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t}(n\theta) + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(n\theta u_\alpha) =$

$$= \frac{3}{2}\left\{ \theta \left[\frac{\partial n}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(n u_\alpha) \right] + n \frac{\partial \theta}{\partial t} + n u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} \right\}$$

El primer corchete es cero por la ecuación de continuidad, de ahí que (II-1,13) se transforme en:

$$\frac{3}{2} n \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right\} \theta + \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} + P_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} = 0$$

y si $\theta \equiv k_B T$:

$$\frac{3}{2} n k_B \frac{dT}{dt} = -\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} - P_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} \qquad \text{(II-1,14)}$$

Ecuación que representa la conservación de la densidad de energía térmica. La variación de esta es debida a dos causas, a la variación espacial de la densidad de corriente calorífica y al trabajo realizado por las fuerzas de presión.

Del mismo modo que el tensor de presión, vemos que la densidad de corriente de calor $\vec{q}$ representa el flujo de energía microscópica promedio medido en una referencia que se mueve con el fluido.

Aunque estas ecuaciones de conservación hayan sido obtenidas a partir de la ecuación de Boltzmann, las definiciones dadas para $\vec{q}$ y $\mathbf{P}$ son generalizables para incluir las interacciones entre las moléculas, con lo que se convertirían válidas en el caso de líquidos densos.

Una vez vistas las ecuaciones de transporte, convendría tener un resumen de las expresiones y magnitudes definidas ya que posteriormente haremos uso de ellas. Las cinco ecuaciones resultantes son:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_\alpha) = 0$$

$$\rho \frac{du_\beta}{dt} = -\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{m}\rho F_\beta \qquad (\beta = x, y, z)$$

$$\frac{3}{2} n k_B \frac{dT}{dt} = -\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} - P_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}$$

donde hemos utilizado el convenio usual de suma y donde:

$\rho(\vec{r};t) = n\, m$ densidad de masa

$u_\beta(\vec{r};t) = \langle v_\beta \rangle$ velocidad media o hidrodinámica

$V_\beta = v_\beta - u_\beta$ velocidad peculiar o térmica

$\frac{3}{2} k_B T(\vec{r};t) = \frac{1}{2}\rho\langle V^2\rangle$ densidad de energía térmica

$P_{\alpha\beta} = \rho\langle V_\alpha V_\beta\rangle$ tensor de presión

$q_\alpha = \frac{1}{2}\rho\langle V_\alpha \vec{V}^2\rangle$ densidad de corriente calorífica

$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$ variación del tensor deformaciones

$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ derivada sustancial