Física de Fluidos (2011-2012)

José Carlos Pérez Fuentes

Mª del Rocío Calero Fernández-Cortés

12. Determinar la forma de la superficie de un fluido ideal incompresible sometido a un campo gravitatorio y contenido en un recipiente cilíndrico que gira alrededor de su eje vertical con una velocidad angular constante Ω.

Primeramente, analicemos qué ocurre cuando el fluido está en reposo, tal y como se muestra en la siguiente figura:

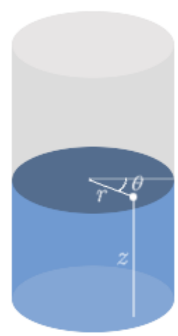

Figura 1. Representación gráfica de un fluido ideal en reposo

Cuando un fluido se mantiene en reposo o se mueve con velocidad constante, la velocidad angular Ω es nula, de lo que resulta que la superficie del fluido es horizontal. Además, la presión exterior coincide con la presión en la superficie del fluido, esté en reposo o en movimiento.

En este caso, consideramos que el fluido no es viscoso y el gradiente de presiones y la velocidad del mismo se relacionan mediante la ecuación de Euler del siguiente modo:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} \tag{1}$$

Particularizando para el sistema en reposo, se tiene que el primer término de la ecuación anterior se anula, reduciéndose entonces a:

$$\nabla p = \rho \vec{g}$$

Veamos que el gradiente de presión sólo depende de la coordenada z; por tanto, las superficies de presión constante serán planos horizontales.

A continuación, estudiemos qué ocurre cuando el cilindro está sometido a un movimiento de rotación con respecto al eje que pasa por su centro, siendo Ω la velocidad angular del cilindro. Cuando transcurra un tiempo suficientemente largo, todas las partículas del fluido se moverán con esta misma velocidad y diremos que, llegados a este punto, el comportamiento del fluido se asemeja al de un sólido rígido (conjunto de puntos del espacio que se mueven de tal manera que no se alteran las distancias entre ellos, sea cual sea la fuerza externa que se ejerce sobre él).

Las componentes de la velocidad de un elemento de fluido, en coordenadas cilíndricas, vienen dadas por:

$$v_r = 0; \qquad v_\theta = \Omega; \qquad v_z = 0$$

El primer término de la ecuación (1) general de Euler se anula porque las componentes anteriores son constantes. Además de la fuerza de gravedad $\vec{g}$, el fluido se ve influenciado por la aceleración centrípeta $\vec{a_n}$ debido al movimiento del mismo (ver Figura 2). La aceleración $\vec{a}$ de un elemento de fluido se define como:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

siendo $\vec{\Omega}$ su velocidad angular y $\vec{\alpha}$ la aceleración angular. Vemos que el primer sumando se anula ya que no existe aceleración tangencial. Dicho esto, la aceleración $\vec{a}$ se expresa del siguiente modo:

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\Omega^2 \vec{r}$$

Por tanto, añadiendo esta aceleración a la ecuación de Euler, tenemos que:

$$\nabla p = \rho(\vec{g} - \vec{a}) \tag{2}$$

Ahora, el gradiente de presión depende de la aceleración centrípeta, además de la gravedad.

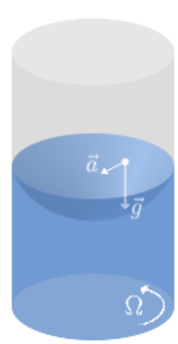

Figura 2. Representación gráfica de un fluido ideal en movimiento

Desarrollando la ecuación (2), obtenemos:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{z} = \rho(-g\hat{z} + r\Omega^2\hat{r})$$

Igualando las componentes $\hat{r}$ y $\hat{z}$:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r\Omega^2; \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Aplicando el método de separación de variables a la primera ecuación, se tiene:

$$p = \frac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 + \phi(z) \tag{3}$$

Derivando con respecto a la coordenada z y comparando el resultado con lo deducido anteriormente:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow \phi(z) = -\rho g z + \text{cte}$$

Reescribiendo la ecuación (3), tenemos:

$$p = \frac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 - \rho g z + \text{cte}$$

La constante se determina particularizando para un valor conocido de la presión en un determinado punto del fluido como, por ejemplo, la presión atmosférica. Sabemos que la presión externa p_{ext} coincide con la presión p_0 de todos los puntos de la superficie del fluido ($p_{ext} = p_0$). Elegimos el punto ($r = 0,\ z = 0$) por simplicidad, siendo la constante de integración igual a la presión exterior ($p = p_{ext} = \text{cte} \equiv p_0$). Por tanto, la ecuación de la presión que rige el comportamiento del fluido en las coordenadas ($r,\ z$) viene dada por:

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 - \rho g z \tag{4}$$

Esta ecuación nos da la forma de la superficie de presión constante p, siendo p_0 la presión manométrica. Teniendo en cuenta únicamente la superficie libre del fluido, se cumple $p = p_{ext} = p_0$, obteniéndose así la expresión de dicha superficie [1]:

$$\frac{1}{2}r^2\Omega^2 - gz = 0 \tag{5}$$

[1] En la práctica, la presión p de un fluido en un recipiente cerrado se mide con ayuda de un manómetro. Este aparato utiliza como nivel de referencia la presión atmosférica y mide la diferencia entre la presión real o absoluta y la presión atmosférica ($p = p_{real} - p_{atm}$)

Llamamos p_0 a la presión del punto mínimo del paraboloide. La presión real p_{real} en este punto es la presión atmosférica ($p_{real} = p_{atm}$), por lo que el manómetro mide una presión $p_0 = 0$.

Veamos que tenemos una función cuadrática y las superficies que se obtienen son paraboloides simétricos de revolución (ver Figura 2), donde el nivel de reposo es justamente la superficie horizontal formada por sus dos máximos. Por conveniencia, situamos el origen de coordenadas en el punto mínimo del paraboloide, en el cual la presión p que se mide es la que existe en este punto $p = p_0$, con lo que tenemos la misma ecuación que antes.

Para determinar el valor de la coordenada del nivel de reposo, únicamente tenemos en cuenta en la ecuación (5), que la coordenada r coincide con el radio R del paraboloide ($r = R$), despejando así la coordenada z correspondiente. Pero, como podemos observar, este nivel se encuentra a la mitad (en la posición $z/2$). Por tanto, se obtiene que la coordenada z del nivel de reposo es:

$$z \equiv \frac{z}{2} = \frac{R^2\Omega^2}{4g}$$

Llegados a este punto, podemos realizar una representación de la distribución de líneas de presión constante a lo largo del eje de coordenadas (r, z). Para ello, damos valores arbitrarios a las constantes de nuestro problema (densidad de masa ρ, constante de gravedad g, radio del paraboloide R y velocidad angular Ω) y fijamos una presión p cualquiera (la cual va a ser mayor que la presión atmosférica). Así, para un conjunto de valores de la coordenada r, se obtienen los distintos valores de la coordenada z, mediante la ecuación (4). Repetimos este proceso para distintos valores de la presión p. También tenemos en cuenta la línea de presión correspondiente a la superficie del fluido donde $p = p_0$. Finalmente, realizando la representación en *Mathematica*, se tiene lo siguiente:

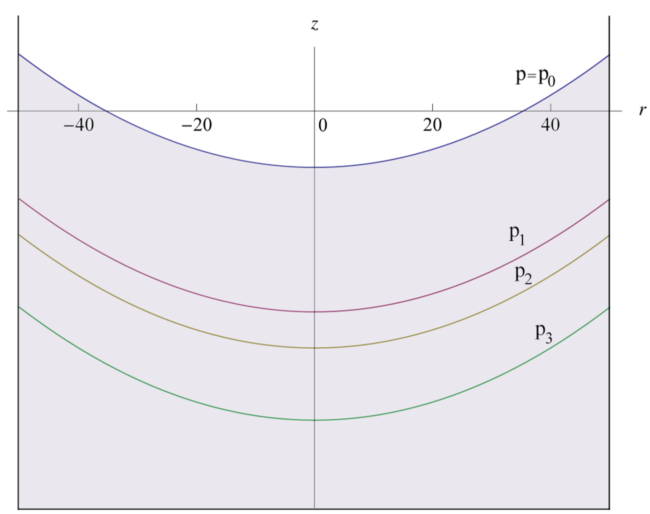

Figura 3. Distribución de líneas de presión constante
($\rho = 0{,}01\,\mathrm{kg\ m^{-3}}$, $g = 9{,}81\,\mathrm{m\ s^{-2}}$, $R = 50\,\mathrm{m}$, $\Omega = 50\,\mathrm{rad\ s^{-1}}$)