UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA
Curso académico 2010/2011

Identificación y características de la asignatura				
Denominación	Métodos de la Física Matemática		Código	104027
Créditos (T+P)	8T+4P			
Titulación	Física			
Centro	Facultad de Ciencias			
Curso	3º	Temporalidad	Anual	
Carácter	Troncal			
Descriptores (BOE)	Ecuaciones diferenciales ordinarias. Funciones especiales. Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Ecuaciones integrales. Métodos asintóticos. Ecuaciones no lineales, estabilidad. Cálculo numérico.			
Profesor/es	Nombre	Despacho	Correo-e	Página web
	Santos Bravo Yuste	B203	santos@unex.es	http://www.unex.es/fisteor/santos/mfm.html
	Vicente Garzó Puertos	B206	vicenteg@unex.es	http://www.unex.es/fisteor/santos/mfm.html
Área de conocimiento	Física Teórica			
Departamento	Física			
Profesor coordinador (si hay más de uno)	Santos Bravo Yuste			

Objetivos y/o competencias

Con esta asignatura culmina la formación matemática reglada de la licenciatura de Física, y su objetivo genérico es completar la formación matemática básica de los estudiantes de Física. En esta asignatura se estudian métodos matemáticos clásicos muy útiles. La primera parte del curso (problema de Sturm-Liouville, funciones especiales y ecuaciones en derivadas parciales) tiene un carácter muy unitario que, en cierto modo, gira en torno del problema de Sturm-Liouville. En el resto del curso, lo temas son menos conexos y pueden estudiarse de forma independiente.

Los objetivos generales específicos de la asignatura son :

- Mostrar la relación existente, la unidad subyacente, entre los diversos ámbitos de los métodos matemáticos. Ejemplos: teoría de Sturm-Liouville y ecuaciones integrales, método de separación de variables y método de balance armónico.
- Mostrar que ciertas ideas clave, como desarrollo de las soluciones desconocidas en series de funciones convenientemente elegidas, aparecen una y otra vez en la física matemática.
- Despertar la curiosidad intelectual y desarrollar la capacidad de entender los métodos matemáticos como algo más que una colección de procedimientos (recetas) inconexas y sin fundamento apreciable.
- Desarrollar la capacidad de resolver problemas matemáticos mediante la aplicación de ideas, no de recetas.
- Apreciar la maravilla de la adecuación del lenguaje matemático en la descripción de los mecanismos que describen y regulan los sistemas naturales.

Otros objetivos específicos y competencias a desarrollar:

Competencias cognitivas

- Entender qué es la estabilidad según Lyapunov, e identificar sus limitaciones.
- Conocer qué son los puntos críticos y reconocer su importancia para el estudio de la estabilidad de los sistemas y su comportamiento global.
- Entender qué son los campos vectoriales de direcciones y su conexión con las trayectorias solución.
- Saber qué es un punto crítico simple, identificar su importancia y reconocer por qué su análisis permite analizar el tipo y estabilidad de ciertos puntos críticos no lineales.
- Entender qué es el método directo de Lyapunov de determinación de la estabilidad de los puntos críticos y su conexión con el concepto de energía.
- Entender el concepto de sensibilidad a las condiciones iniciales y su cuantificación mediante exponentes de Lyapunov.
- Saber qué es un ciclo límite e identificar su importancia y su naturaleza

singular.

- Entender la idea subyacente en el método de Balance Armónico y de Krylov-Bogoliubov.
- Entender la relación entre ecuaciones integrales y diferenciales, apreciando sus diferencias y similitudes.
- Saber en qué consiste el método de resolución de ecuaciones integrales con núcleo separable.
- Conocer el teorema de la alternativa de Fredholm y apreciar su conexión con el teorema correspondiente de la teoría de Sturm-Liouville.
- Entender el método de la serie de Neumann como método de aproximaciones sucesivas.
- Conocer la teoría de Schmidth-Hilbert y saber expresar las soluciones de los problemas no homogéneos en términos de serie de autofunciones.
- Entender qué es un serie asintótica y apreciar sus diferencias con las series convergentes.
- Conocer la regla del truncamiento óptimo y su justificación.
- Identificar las circunstancias en las que el método de integración por partes es adecuado.
- Apreciar las ideas claves del método de Laplace.
- Entender en qué consiste el método de Laplace cuando se aplica a integrales generalizadas de Laplace.
- Entender el procedimiento del método de Laplace cuando el máximo es no fijo.
- Entender el origen del método de la fase estacionaria y apreciar sus similitudes y diferencias con el método de Laplace.

2. Competencias instrumentales

- Ser capaz de identificar un problema de valores propios con la resolución de una ecuación diferencial.
- Ser capaz de resolver un problema físico con condiciones de contorno dadas a partir del formalismo de Sturm-Liouville.
- Saber aplicar el método de la función de Green para la resolución de ecuaciones diferenciales inhomogéneas.
- Ser capaz de identificar la solución de un cierto problema físico en términos de alguna función especial.
- Ser capaz de adquirir cierta destreza para probar diversas propiedades de los polinomios ortogonales.
- Ser capaz de determinar los coeficientes del desarrollo de una función en serie de polinomios ortogonales.
- Ser capaz de desarrollar una función en serie de funciones de Bessel.
- Ser capaz de distinguir las distintas clases de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden.
- Ser capaz de aplicar el método de separación de variables para la resolución de una ecuación diferencial en derivadas parciales homogénea.
- Ser capaz de aplicar el método de las transformadas integrales de Laplace o Fourier para la resolución de una ecuación diferencial en derivadas parciales.
- Ser capaz de razonar físicamente para encontrar la solución particular de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales inhomogéneas y/o con

algún término fuente.

- Ser capaz de determinar los tipos de puntos críticos de sistemas lineales y calcular las trayectorias solución en sus vecindades.
- Ser capaz de esbozar campos vectoriales de sistemas lineales y no lineales (tanto de forma manual como mediante programas de ordenador).
- Ser capaz de determinar los tipos y características de las trayectorias solución en las vecindades de puntos críticos simples de sistemas no lineales.
- Ser capaz de emplear el método de Lyapunov para determinar la estabilidad de puntos críticos.
- Ser capaz de emplear el método de balance armónico y Krylov-Bogoliubov para encontrar soluciones aproximadas de osciladores no lineales sencillos.
- Ser capaz de resolver ecuaciones integrales de Fredholm con núcleo degenerado, hallando en particular los autovalores y autofunciones del núcleo.
- Saber aplicar el teorema de la alternativa de Fredhlom a ecuaciones particulares sabiendo identificar en qué casos la excepción a la alternativa se da y por qué.
- Ser capaz de aplicar la teoría de Schmidt-Hilbert a la resolución de ecuaciones integrales sencillas.
- Ser capaz de resolver ecuaciones de Volterra y Fredholm reduciéndolas a ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales y de contorno.
- Ser capaz de aplicar la regla del truncamiento óptimo para determinar la mejor aproximación asintótica en cada caso.
- Ser capaz de aplicar el método de integración por partes para la obtención de aproximaciones asintóticas, detectando cuando el método no es factible.
- Ser capaz de aplicar el método de Laplace en integrales generalizadas de Laplace yendo más allá de los casos típicos explicados en clase.
- Ser capaz de aplicar el método de la fase estacionaria en integrales sencillas.

3. Competencias metacognitivas

- Desarrollar la capacidad de entender, analizar y corregir el modo en el que uno mismo piensa, se enfrenta a los problemas, y aprende, descubriendo qué es lo que realmente se sabe y por qué.
- Ser consciente de la importancia de disponer de evidencias para extraer conclusiones
- Impulsar la capacidad de razonamiento crítico y de pensamiento analítico.
- Impulsar la creatividad para enfrentarse al análisis de sistemas y fenómenos no tradicionales con comportamientos impredecibles y complejos
- Ser capaz de aprender de forma autónoma
- Ser capaz de organizar y planificar el aprendizaje

4. Competencias comunicacionales

- Ser capaz de elaborar documentos científicos claros y precisos, tanto por escrito como de forma oral.
- Ser capaz de buscar, localizar, depurar, analizar, y sintetizar información,

haciendo uso en su caso de procedimientos informáticos y de tecnología de la información.
- Desarrollar la capacidad de trabajo en equipo
- Desarrollar la capacidad de emplear de forma efectiva y adecuada las tecnologías de la información y comunicación (TIC)
- Desarrollar la capacidad de comprender textos científicos en inglés.

Temas y contenidos
(especificar prácticas, teoría y seminarios, y actividades en general en su caso)

TEMARIO *

I. PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE (9 h)
- Introducción
- Ecuación de Sturm-Liouville (2h)
  - Definición de la ecuación de Sturm-Liouville
  - Definición del problema de Sturm-Liouville
  - Generalidad de la ecuación de Sturm-Liouville
- El operador de Sturm-Liouville es hermítico (1h)
- Desarrollo en serie de autofunciones (1h)
- Función de Green (4h)
  - Definición y propiedades de la función de Green
  - Solución del problema de Sturm-Liouville en términos de la función de Green
  - Construcción de la función de Green
  - Representación de la función de Green en serie de autofunciones
- Condiciones de contorno no homogéneas (1h)

II. FUNCIONES ESPECIALES (10h)
- Introducción
- Propiedades generales de los polinomios ortogonales (1h)
  - Relación de recurrencia
  - Función generatriz
- Polinomios de Legendre (2h)
  - Resolución de la ecuación de Legendre mediante serie de potencias
  - Primeros polinomios
  - Fórmula de Rodrigues
  - Representaciones integrales

- Función generatriz
- Desarrollo en serie de polinomios de Legendre
- Relaciones de recurrencia de los polinomios de Legendre
- Funciones asociadas de Legendre (2h)
  - Demostración de la fórmula de Rodrigues
  - Relación de proporcionalidad de las funciones asociadas de Legendre
  - Primeras funciones asociadas de Legendre
  - Ortogonalidad, norma y simetría
  - Relaciones de recurrencia
  - Armónicos esféricos
- Polinomios de Hermite (2h)
  - Resolución de la ecuación de Hermite mediante serie de potencias
  - Función generatriz
  - Norma de los polinomios de Hermite
  - Desarrollo en serie de los polinomios de Hermite
  - Fórmula de Rodrigues y paridad
  - Primeros polinomios de Hermite
  - Relaciones de recurrencia
- Polinomios asociados de Laguerre (1h)
  - Función generatriz y norma
  - Desarrollo en serie
  - Fórmula de Rodrigues
  - Relaciones de recurrencia
- Funciones de Bessel (2h)
  - Ecuaciones reducibles a ecuaciones de Bessel
  - Funciones de Bessel como oscilaciones amortiguadas
  - Relaciones de recurrencia
  - Cálculo de las funciones de Bessel mediante relaciones de recurrencia
  - Función generatriz
  - Relaciones integrales
  - Funciones de Bessel de orden semientero y funciones esféricas de Bessel
  - Funciones de Bessel y problema de Sturm-Liouville

III. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES (8h)

- Introducción y definiciones
- Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden (2h)
  - Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden
  - Condiciones de contorno
- Separación de variables (3h)
- Método de las transformadas integrales (3h)

IV. ECUACIONES DIFERENCIALES Y SISTEMAS NO LINEALES. ESTABILIDAD (11h)

- Introducción
- Estabilidad (2h)
  - Definiciones previas
  - Definición de estabilidad según el criterio de Liapunov
  - Definición de estabilidad asintótica
  - Sistema perturbativo
  - Definición de punto crítico
- Estabilidad de sistemas lineales (2h)
  - Estabilidad de sistemas lineales de dos ecuaciones
  - Sistemas con más de dos ecuaciones
- Estabilidad de sistemas no lineales (3h)
  - Campo vectorial de direcciones y trayectorias solución
  - Estabilidad en torno a los puntos críticos simples
  - Estabilidad por el método directo de Liapunov
- Ciclos límite (1h)
- Cálculo de Soluciones Periódicas (2h)
  - Método de Balance Armónico
  - Método de Krylov-Bogoliubov
- Caos y atractores extraños. Ecuaciones de Lorenz (1h)

V. ECUACIONES INTEGRALES LINEALES (8h)

- Introducción
- Definiciones y clasificación de las ecuaciones integrales (0.5h)
- Equivalencia entre ecuaciones integrales y ecuaciones diferenciales (0.5h)
- Ecuación de segunda especie con núcleo separable (2h)
  - Ecuación de segunda especie inhomogénea con núcleo degenerado
  - Ecuación de segunda especie homogénea con núcleo degenerado: autovalores y autofunciones
- Teoremas de Fredholm (1h)
- Series de Neumann (0.5h)
- Series de Fredholm (0.5h)
- Teoría de Schmidt-Hilbert (1h)
  - Algunas propiedades de los núcleos reales simétricos
  - Teoremas de Fredholm para núcleos reales y simétricos
- Técnicas varias de resolución de ecuaciones integrales (2h)
  - Reducción de la ecuación integral a una ecuación diferencial
  - Ecuaciones integrales de convolución
  - Desarrollo en serie de funciones ortogonales

VI. DESARROLLO ASINTÓTICO DE INTEGRALES (8h)

- Introducción
- Resultados útiles sobre series (0.5h)
- Comparación de funciones. Símbolos O, o, $\sim$
- Series asintóticas (1h)
  - Definición de serie asintótica

- Ejemplo de serie asintótica
- Aproximaciones numéricas mediante series asintóticas. Regla del truncamiento óptimo
- Desarrollo del integrando (0.5h)
- Integración por partes (0.5h)
- Método de Laplace (1h)
- Lema de Watson (0.5h)
- Desarrollo asintótico de integrales generalizadas de Laplace (2h)
    - Primer modo. Cambio de variable
    - Segundo modo. Modo directo
    - Máximo no fijo
- Integrales de Fourier (1)
    - Integración por partes de integrales de Fourier sin puntos estacionarios
    - Integrales de Fourier con puntos estacionarios.
- Método de la fase estacionaria (2)
    - Método de la fase estacionaria. Caso simple
    - Metodo de la fase estacionaria. Caso más general
    - Método de la fase estacionaria cuando f(t) va a cero como una potencia cuando t tiende al punto estacionario

METODOLOGÍA Y ACTIVIDADES (y su relación con las competencias que debe adquirir el estudiante)

Actividad formativa	Competencias	Metodología
1. Resolución, análisis y discusión de problemas prácticos propuestos.	**C2, C3**	Resolución de problemas tipo por el profesor. Resolución guiada y/o interactiva de problemas. Resolución de problemas de forma autónoma por parte del alumno. Resolución de problemas usando metodología activa (PBL).
2. Explicación y discusión de los contenidos.	**C1, C2**	Clase magistral. Análisis crítico.
3. Realización, exposición y defensa de trabajos / proyectos.	**C3, C4**	Trabajo en equipo Búsqueda de información bibliográfica Elaboración de documentos científicos Uso de TIC's Exposición en el soporte elegido (presentación tipo powerpoint) a compañeros
4. Actividades de seguimiento individual o grupal del aprendizaje.	**C1, C2, C3, C4**	Propuesta y resolución de trabajos puntuales. Realización de exámenes.

		Actividades tutoriales individuales y/o grupales presenciales y/o virtuales
5. Estudio independiente del alumno.	**C1, C2, C3, C4**	Facilitar bibliografía Uso de paquetes informáticos y simulación Facilitar copia de transparencias Facilitar acceso a material y enlaces relevantes en la página web de la asignatura
6. Actividades complementarias.	**C3, C4**	Seminarios y conferencias

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

- Es muy conveniente repasar los métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. También será útil repasar la teoría de series de funciones antes del tema VI ("Desarrollo asintótico de integrales").
- No dejar el estudio de las materias para el final. Lo que todas las evidencias nos dicen es que el estudio en etapas ("día a día") es el más productivo y eficiente.
- Realizar las tareas que se propongan.
- La lectura previa a la clase de los contenidos correspondientes es una excelente manera de aprovechar la asistencia a clase.
- Asistir a clase y participar activamente, respondiendo a las preguntas, formulando preguntas y buscando respuestas de forma independiente y en grupo.
- Preguntar lo que no se sabe; pedir explicaciones de lo que no entiende: la herramienta más efectiva y fácil de utilizar para transformar la ignorancia en conocimiento es una pregunta a tiempo.
- No dejar todas estas preguntas para el final, para los días anteriores al examen, la entrega de la memoria y trabajos, la exposición oral.
- Estudiar en los libros de forma autónoma es un ejercicio intelectual excelente, y preguntar al profesor lo que, tras esfuerzo personal, no se haya entendido, el corolario natural.
- En la página web de la asignatura http://www.unex.es/fisteor/santos/mfm.html puede encontrarse material de ayuda diverso: exámenes de años anteriores, las hojas de problemas, programas informáticos, recursos didácticos basados en cuadernos *Mathematica*, enlaces útiles, artículos, "handouts", transparencias utilizadas en clase, etc.

Criterios de evaluación
1. Resolver problemas y cuestiones trabajando de forma independiente y en equipo. Peso: **10%** de la nota final. Los problemas asignados deberán ser entregados resueltos y bien explicados en la fecha señalada. No se aceptarán problemas parcialmente resueltos o mal explicados. El profesor, antes de la fecha señalada, colaborará gustosamente en resolver las dudas y problemas que pudieran surgir, pero los alumnos deberán acreditar que han trabajado de forma suficiente en su resolución. El no seguir esta norma podría penalizarse con hasta un 50% de la nota correspondiente. 2. Exponer la solución de los problemas asignados de forma concisa y clara al resto de la clase mediante exposiciones orales de 20 a 30 minutos. Peso: **10%** de la nota final. Todos los alumnos habrán de llevar a cabo esta actividad al menos una vez en el curso. El profesor planteará preguntas al alumno con el fin de comprobar que éste entiende por completo el modo en que el problema se resuelve y los conceptos implicados en su resolución. 3. Mostrar una participación activa en clase a lo largo del curso. Peso: **5%** de la nota final. La inasistencia a clase por motivos *justificados* no conllevará penalización. 4. Demostrar la comprensión de los conceptos teóricos y la capacidad del alumno para aplicarlos a la resolución de cuestiones prácticas y/o problemas. El examen final constará de cuatro o cinco preguntas. Una de ellas podría ser una cuestión de teoría que habrá de responderse sin consultar ningún tipo de texto o apunte. El resto de las cuestiones serán problemas para cuya resolución podrán emplearse libros de fórmulas, tablas matemáticas y/o un *formulario* confeccionado por el alumno. En este material auxiliar no podrá recogerse ningún problema, ejemplo resuelto o desarrollo similar relacionado con la materia de examen. Todas las cuestiones tendrán la misma valoración, salvo que, antes del examen, se indique lo contrario. Peso: **75%** de la nota final. El alumno deberá acreditar una nota mínima de 4 sobre 10 en el apartado 4 para que se le apliquen las calificaciones de los apartados 1, 2 y 3 en el cálculo de la nota final del curso. El apartado 4 podrá superarse mediante la realización de dos exámenes parciales, cuyas características serán iguales a las del final. Estos exámenes, dada la nota mínima escogida, no podrán compensarse. Los exámenes parciales serán eliminatorios, de modo que en el examen final el alumno podría examinarse sólo de la materia del parcial que no haya superado. Los alumnos que aprueben por parciales podrán presentarse al examen final para subir nota.

Bibliografía

Teoría

- Santos Bravo Yuste, *Métodos matemáticos avanzados para científicos e ingenieros*, Manual 48 UEx (Servicio de Publicaciones de la UEx, Cáceres, 2006). Este libro, en formato pdf, puede consultarse y descargarse libre y gratuitamente en el Servicio de Publicaciones de la UEx, o bien desde la página web http://www.unex.es/eweb/fisteor/santos/mma/. Este libro debe emplearse como una herramienta que debería ser especialmente útil y conveniente para el alumno dado que permite, entre otras cosas:
    - Leer por adelantado los contenidos que van a tratarse en las clases teóricas.
    - Ahorrarse la toma de notas intensivas, lo que facilita la atención a los conceptos e ideas, pues la práctica totalidad de los contenidos que se discutirán en las clases teóricas se encuentran recogido en este libro.
    - La consulta de muchos ejemplos y problemas resueltos directamente relacionados con el curso
    - El estudio de temas avanzados no tratados en el curso, pero relacionados directamente con él.
- G. B. Arfken y H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, quinta edición, (Academic Press, San Diego, 2001). Un libro muy completo. Son excelentes sus capítulo dedicados a las funciones especiales.
- R. Haberman, *Elementary applied partial differential equations*, (Prentice-Hall, Engle-wood Cliffs, 1983*).* Libro excelente para el tema de Sturm-Liouville.
- H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques*, (Wiley, Nueva York, 1981). Útil porque contiene muchos problemas completamente resueltos de desarrollos asintóticos de integrales y también otros muchos con la solución final dada.
- S. L. Ross, *Ecuaciones diferenciales*, (Reverté, Barcelona, 1981).
- F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, segunda edición, (McGraw-Hill, Madrid, 1993). Un libro excelente que hay que utilizar tan a menudo como se pueda. Lectura obligada. Especialmente útil son sus secciones dedicadas a sistemas

lineales y no lineales.

- *S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos* (Addison-Wesley, Reading, 1999). Un libro claro y con un enfoque muy moderno sobre sistemas no lineales.
- *A. J. Jerri, Introduction to Integral Equations with Applications,* segunda edición *(Wiley, Nueva York, 1999).* Un libro excelente y muy claro sobre ecuaciones integrales.
- *E. Butkov, Mathematical Physics* (Addison-Wesley, Reading, 1968). *Un libro excelente.* Nos será útil en los temas dedicados al problema de Sturm-Liouville y a las ecuaciones en derivadas parciales.
- *C.M. Bender y S. A. Orszag, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill, Nueva York, 1978). Un libro detallado, accesible, cuidadoso y práctico. Muy completo. Muy útil en el tema sobre desarrollo asintótico de integrales.
- *R. Courant y D. Hilbert. Methods of Mathematical Physics (Wiley, Nueva York, 1962).* Referencia clásica de nivel avanzado.

Problemas

- F. Ayres, *Ecuaciones diferenciales* (McGraw-Hill, México,1970). Serie Schaum.
- M. L. Krasnov, A. I. Kiseliov y G. I. Makarenko, *Ecuaciones integrales*, (Mir, Moscú, 1982). Un libro muy práctico pues contiene muchísimos problemas propuestos y resueltos.
- M. R. Spiegel, *Análisis de Fourier* (McGraw-Hill, México,1976). Serie Schaum. Un libro muy útil pues contiene un gran número de problemas resueltos de ecuaciones en derivadas parciales.

Tutorías

	Horario	Lugar
Lunes	Vicente Garzó, 12-14 h Santos Bravo, 12-14 h	Despacho B206 (Edificio de Física) Despacho B203 (Edificio de Física)
Martes		
Miércoles	Vicente Garzó, 12-14 h Santos Bravo, 12-14 h	Despacho B206 (Edificio de Física) Despacho B203 (Edificio de

		Física)
Jueves	Santos Bravo, 12-14 h	Despacho B203 (Edificio de Física)
Viernes	Vicente Garzó, 12-14 h	Despacho B206 (Edificio de Física)