MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Primer examen parcial. 20 de febrero de 2008

1. Consideremos el siguiente problema inhomogéneo

$$y'' = \cos(3x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

con las condiciones de contorno $y'(0) = 0$ e $y(\pi/2) = 0$.

- Encontrar la función de Green de dicho problema en forma cerrada.
- Hallar la función de Green como desarrollo de las autofunciones asociadas al correspondiente problema de Sturm-Liouville.
- ¿Existe solución al problema $y'' + 9y = \cos(3x)$ con las condiciones de contorno $y'(0) = 0$ e $y(\pi/2) = 0$? Razona la respuesta.

2. *a*) La función generatriz asociada a los polinomios de Chebichev $U_n(x)$ de tipo II viene dada por

$$G(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n.$$

Obtener el valor de $U_n'(0)$ a partir de dicha función generatriz, donde $U_n'(x) = \frac{dU_n}{dx}$.

b) La función generatriz asociada a los polinomios de Hermite $H_n(x)$ viene dada por

$$G(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

- Obtener la relación de recurrencia que liga a los polinomios H_{n+1}, H_n y H_{n-1} a partir de la función generatriz anterior.
- Evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} (x-1)^2 H_n(x).$$

- A partir del resultado anterior evaluar la suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} (x-1)^2 H_n(x).$$

3. Determinar la distribución de temperatura $T(x,t)$ de una barra que incialmente se encuentra a temperatura cero ($T(x,0) = 0$), mantiene los extremos a esa temperatura ($T(\pm 1, t) = 0$) y además posee en su interior una fuente constante de calor q. En estas condiciones la dependencia espacio-temporal de la temperatura viene dada por la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q.$$

Nota: Dado que la ecuación diferencial es inhomogénea, la solución general del problema debe estar formada por la suma de una solución particular del problema inhomogéneo (con condiciones de contorno homogéneas) más la solución general del problema homogéneo (con $q = 0$).