Nombre del alumno: ....

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Primer examen parcial. Febrero de 2005

1. **Teoría.** Una propiedad fundamental del operador de Sturm-Liouville $\mathcal{L}$ es que es un operador hermítico dentro del espacio vectorial L^2_{SL} de las funciones de cuadrado sumable definidas en el intervalo $[a, b]$ que satisfacen condiciones de contorno de Sturm-Liouville, es decir, se verifica que

$$\langle f|\mathcal{L}|g\rangle = \langle g|\mathcal{L}|f\rangle^* \tag{1}$$

para cualquier $f, g \in L^2_{SL}$. Se pide demostrar esta propiedad demostrando para ello previamente la identidad o fórmula de Green

$$\langle f|\mathcal{L}|g\rangle - \langle g|\mathcal{L}|f\rangle^* = \left\{ p(x) \left[f^*(x)\frac{dg}{dx} - g(x)\frac{df^*}{dx} \right] \right\}_a^b .$$

2. Halla en forma cerrada la función de Green del problema

$$\begin{aligned} xy'' + y' &= x, \quad 0 \le x \le 1, \\ y(0) &= \text{finito}, \\ y(1) &= 0. \end{aligned}$$

Usa la función de Green para calcular la solución $y(x)$ de este problema. Comprueba que la solución obtenida satisface la ecuación diferencial y las condiciones de contorno.

3. Halla el valor de $P_l'(1)$

   a) A partir de la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l \left(x^2 - 1\right)^l ,$$

   utilizando la fórmula de derivación de un producto de Leibniz, y demostrando que

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+1} (x-1)^l (x+1)^l \Bigg|_{x=1} = l(l+1)!(x+1)^{l-1}\Big|_{x=1} .$$

   b) A partir de la función generatriz:

$$G(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} .$$

4. Resuelve mediante separación de variables la ecuación de difusión

$$u_t = u_{xx} + u, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t > 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = 0$ y la condición inicial (a) $u(x, 0) = \text{sen}(x)$; (b) $u(x, 0) = \text{sen}(x) + \text{sen}(2x)$