Nombre del alumno: ....

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Primer examen parcial. Curso 05/06

1. Sea el problema

$$\begin{aligned} y'' - y' &= 1, \quad 0 \le x \le \pi, \\ y(0) &= 0 \\ y(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

   Se pide:

   a) Hallar la función de Green de este problema en forma cerrada y, mediante este resultado, hallar la solución $y(x)$ del problema anterior.

   b) Hallar la función de Green en forma de un desarrollo en autofunciones y, mediante este resultado, hallar la solución $y(x)$ del problema anterior.

   Dato:

$$\int_0^\pi e^{-x/2}\,\mathrm{sen}(nx)dx = \frac{(1-(-1)^n e^{\pi/2})n}{1/4+n^2} \quad \text{para} \quad n = \text{entero}$$

2. Emplea la fórmula de Rodrigues de los polinomios de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

   para demostrar que

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}\,P_n(x)$$

3. Resuelve la ecuación de difusión

$$u_t = u_{xx} + u, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t > 0,$$

   con las condiciones de contorno *no homogéneas* $u(0,t) = 1$, $u(\pi,t) = -1$ y la condición inicial $u(x,0) = f(x)$. Halla de forma explícita las soluciones para:

   a) $u(x,0) = \mathrm{sen}(x) + \cos(x)$,

   b) $u(x,0) = \mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(3x) + \cos(x)$