Nombre del alumno:

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Primer examen parcial. 6 de marzo de 2009

1. *a*) Demostrar que la ecuación diferencial

$$y''(x) + y'(x) + (1+\lambda)y(x) = 0$$

es una ecuación de Sturm-Liouville.

b) Encontrar los autovalores λ_n y autofunciones $\psi_n(x)$ del problema de Sturm-Liouville siguiente:

$$y''(x) + y'(x) + (1+\lambda)y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

c) Considerar el siguiente problema de Sturm-Liouville inhomogéneo

$$y''(x) + y'(x) + \frac{1}{4}y(x) = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Encontrar la solución del problema en la forma de un desarrollo en serie de las autofunciones $\psi_n(x)$ del operador de Sturm-Liouville correspondiente.

d) Encontrar la solución explícita del apartado anterior si $f(x) = e^{x/2}\mathrm{sen}(3\pi x)$

Nota: La solución de $y''(x) + 2\beta y'(x) + \omega_0^2 y(x) = 0$ es (a) $y(x) = e^{-\beta x}[A\cos(\omega x) + B\mathrm{sen}(\omega x)]$ con $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ si $\omega_0^2 > \beta^2$, (b) $y(x) = e^{-\beta x}(A + Bx)$ si $\omega_0^2 = \beta^2$, (c) $y(x) = e^{-\beta x}[A\cosh(\omega x) + B\mathrm{senh}(\omega x)]$ con $\omega^2 = \beta^2 - \omega_0^2$ si $\beta^2 > \omega_0^2$.

2. *a*) La probabilidad de transición entre los estados n y m de un oscilador cuántico unidimensional es proporcional a la integral

$$I_{nm} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} x H_n(x) H_m(x),$$

donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite de orden n. Determinar I_{nm}. ¿ Cuál es la probabilidad de transición entre el primer ($n = 1$) y el segundo ($n = 2$) estado excitado?

b) La función generatriz asociada a los polinomios de Gegenbauer $C_n^\alpha(x)$ de grado n y orden n viene dada por

$$G_\alpha(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\alpha(x) t^n,$$

donde $\alpha > 0$.

- Obtener la relación de recurrencia que liga a los polinomios $C_{n+1}^\alpha(x)$, $C_n^\alpha(x)$ y $C_{n-1}^\alpha(x)$ a partir de la función generatriz anterior.
- Hallar el valor de $C_n^\alpha(1)$, $C_n^\alpha(-1)$ y $C_n^\alpha(0)$.
- Demostrar que $C_n^\alpha(x) = (-1)^n C_n^\alpha(-x)$.

Nota:

$$(1-x)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta+n-1)!}{(\beta-1)!n!} x^n, \quad \beta > 0$$

3. Consideremos una barra que inicialmente se encuentra a temperatura cero ($T(x,0) = 0$) y que mantiene sus extremos a esa temperatura inicial ($T(\pm 1, t) = 0$). Supongamos además que dicha barra posee en su interior una fuente de calor $q(x) = 6x$. En estas condiciones la dependencia espacio-temporal de la temperatura viene dada por la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 6x.$$

a) Determinar la distribución de temperatura de la barra en el límite de tiempos largos (solución estacionaria).

b) Encontrar la solución general del problema.

Nota: Dado que la ecuación diferencial es inhomogénea, la solución general del problema debe estar formada por la suma de una solución particular del problema inhomogéneo (con condiciones de contorno homogéneas) más la solución general del problema homogéneo (con $q = 0$).