MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA.

Segundo Parcial. 30/05/05

1. Consideremos el siguiente sistema no lineal de ecuaciones

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -4x + x^2.$$

   a) Hallar los puntos críticos. ¿Son puntos críticos simples? Determinar su tipo y su estabilidad.

   b) Hallar la ecuación de las trayectorias que pasan por los puntos críticos.

   c) Mediante el método de balance armónico determinar de forma aproximada las trayectorias que pasan por las vecindades del origen. Utiliza este resultado para averiguar la estabilidad del origen (0,0).

   d) Dibuja un esquema de las trayectorias en el plano $x - y$.

2. *a*) Encuentra todas las soluciones posibles de la ecuación integral

$$\varphi(x) = g(x) + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} dt\ \varphi(t) \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)\cos(nt),$$

   para todos los posibles valores de λ en los casos (a) $g(x) = 0$ y (b) $g(x) = \mathrm{sen}(x)$.

   b) Resolver la ecuación integral

$$\varphi(x) = x - \int_0^x dt\ \mathrm{senh}(x-t)\ \varphi(t).$$

3. *a*) Encontrar de forma razonada la conducta asintótica completa de la integral

$$I(x) = \int_x^{\infty} dt\ \frac{\cos(t)}{t}$$

   cuando $x \to \infty$.

   b) La función de Airy de segunda clase $\mathrm{Bi}(z)$ tiende una representación integral dada por

$$\mathrm{Bi}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\exp(-\frac{1}{3}t^3 + zt) + \mathrm{sen}(\frac{1}{3}t^3 + zt)\right] dt.$$

   Hallar su conducta asintótica principal cuando $z \to \infty$.