MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA.

Segundo Parcial. 05/06/06

1. Una partícula se mueve en el plano $x - y$ de acuerdo a las ecuaciones de movimiento

$$\dot{x} = (x^2 - 1)(y^2 + 1), \quad \dot{y} = xy.$$

   a) Hallar los puntos críticos. ¿Son puntos críticos simples? Determina su tipo y analiza su estabilidad. Dibuja un esquema aproximado de las trayectorias en el plano $x - y$.
   b) Hallar la ecuación de las trayectorias $y = f(x)$ que pasan por los puntos críticos.
   c) Supongamos que la partícula se encuentra inicialmente en $x(t = 0) = 1 - \epsilon$, $y(t = 0) = 0$ donde $0 \leq \epsilon \leq 1$. Determinar el tiempo que tarda la partícula en cruzar el origen así como el tiempo que transcurre hasta que se detiene.

2. a) Encuentra todas las soluciones posibles de la ecuación integral homogénea

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{+1} dt\ (x^2 - 2xt)\varphi(t),$$

   para todos los posibles valores de λ.
   b) Encuentra todas las soluciones posibles de la ecuación integral inhomogénea

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{+1} dt\ (x^2 - 2xt)\varphi(t) = x^3 - x,$$

   para todos los posibles valores de λ.
   c) Interpretar los resultados obtenidos en el apartado anterior mediante el teorema de la alternativa de Fredholm.

3. a) Encontrar los dos primeros términos del desarrollo asintótico de la integral

$$\int_x^{\infty} dt\ t^{\lambda-1}\ e^{-t}$$

   cuando $x \to \infty$.
   b) Hallar la conducta asintótica principal cuando $x \to \infty$ de la integral

$$\int_1^2 \exp\left[-x\left(t + \frac{1}{t}\right)\right]\ \ln(1 + t)\ dt.$$