MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁÁTICA.

Segundo Parcial. 08/06/07

1. (3 puntos)

   a) Sea la ecuación integral:

   $$\phi(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 dy(xy^2 + yx^2)\phi(y)$$

   - Identifique el núcleo de dicha ecuación integral. Obtenga la solución exacta de esta ecuación.
   - Determine los autovalores de la ecuación homogénea asociada.

   b) Halle la solución exacta de la ecuación integral:

   $$\phi(x) = 4x + \int_0^x dy \operatorname{sen}(x-y)\phi(y)$$

2. (3 puntos) Sea un sistema gobernado por las ecuaciones de movimiento:

   $$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + y \\ \dot{y} &= y(8 + x^3), \end{aligned}$$

   donde a es un número real y no nulo.

   a) Determine los puntos críticos del sistema.

   b) Linealice las ecuaciones de movimiento alrededor de los puntos críticos que sean simples y analice la estabilidad a partir de las ecuaciones resultantes, en función del valor de a. ¿ Qué se puede decir acerca de la estabilidad no-lineal de los puntos críticos simples de este sistema?

   c) Considere ahora que $0 < a < 1$. Dibuje las trayectorias del sistema linealizado, para cada punto crítico por separado. Sírvase de esto para dibujar las trayectorias del sistema linealizado, teniendo en cuenta todos los puntos críticos (en caso de que haya más de uno).

3. (2 puntos) Determine los dos primeros términos de la serie asintótica de la integral:

   $$\int_x^\infty dt\, e^{-at^2},$$

   donde $a > 0$ y $x \to \infty$.

4. (2 puntos) Encuentre la solución aproximada, utilizando el método de balance armónico, de la siguiente ecuación:

   $$\boxed{\ddot{x} - \frac{1}{4}x^2 = 0.} \rightarrow \boxed{\text{Errata. Es x''+(x^3)/4=0}}$$

Nota: Las siguientes relaciones podrían serle útiles en sus cálculos para las cuestiones:

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen} x] = \frac{1}{s^2+1}, \quad \mathcal{L}[x^n] = s^{-(n+1)}n!, \ (n \text{ entero.})$$

$$\left\langle \cos^{2n} \right\rangle = \left\langle \mathrm{sen}^{2n} \right\rangle = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!},$$
$$\left\langle \cos^{2n} \mathrm{sen}^{2m+1} \right\rangle = \left\langle \cos^{2n+1} \mathrm{sen}^{2m} \right\rangle = \left\langle \cos^{2n+1} \mathrm{sen}^{2m+1} \right\rangle = 0,$$

con n, m enteros y $\langle f \rangle$ indica:

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi f(\phi),$$

y, por ejemplo, $5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1$, etc.