

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Segundo examen parcial. 9 de junio de 2008

1. Consideremos el siguiente oscilador no lineal

$$\ddot{x} + \epsilon(|\dot{x}| - 1)\dot{x} + x = 0$$

- Utilizar el método de Krylov-Bogoliubov para hallar la forma aproximada de este ciclo límite.
- Estudiar la estabilidad del ciclo límite.
- Calcular la solución aproximada $x(t)$.

Datos: $\int_0^\pi \sin^3 \psi \, d\psi = \frac{4}{3}$, $\int_0^{2\pi} \sin^2 \psi \, d\psi = \pi$, $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a} \ln \frac{x}{a+bx}$

2. Resolver la ecuación integral

$$f(x) = e^{-|x|} + \lambda \int_0^\infty e^{-|x-y|} f(y) dy,$$

donde $\lambda > \frac{1}{2}$.

Nota: El resultado final hay que expresarlo en términos de la constante arbitraria $A = \int_0^\infty e^{-y} f(y) dy$.

3. a) Encontrar el término dominante para $x \rightarrow \infty$ de la integral

$$I(x) = \int_0^\infty e^{xt} e^{-t^2}, \quad x \rightarrow \infty.$$

b) Hallar los dos primeros términos del desarrollo asintótico para $x \rightarrow \infty$ de la integral

$$I(x) = \int_0^{\pi/4} \cos(xt^2) \operatorname{tg}^2(t), \quad x \rightarrow \infty.$$

Dato:

$$\int_0^\infty ds e^{-xs^2} s^n = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) x^{-(n+1)/2}$$