Nombre del alumno: ....

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA
Examen de de recuperación del primer y segundo parcial y examen final. Curso 08/09

Los alumnos que tengan que examinarse de toda la asignatura habrán de responder a los ejercicios marcados con el símbolo ★. La puntuación de las preguntas del segundo parcial sólo se refieren a esa parte del examen.

PRIMER PARCIAL

1. ★ Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$xy''(x) + y'(x) = x$$

con las condiciones de contorno $y(0) =$ finito, $y(1) = 0$.

a) Escribirla en la forma de una ecuación de Sturm-Liouville.

b) Encontrar en forma cerrada la función de Green de dicho problema.

c) Utilizar dicha función de Green para determinar la solución $y(x)$ de esta ecuación diferencial inhomogénea.

d) Comprobar que la solución obtenida satisface la ecuación diferencial y las condiciones de contorno.

2. *a*) Evaluar la integral

$$I_{nm} \equiv \int_{-1}^{+1} dx\, x^2 P_n(x) P_m(x),$$

donde $P_n(x)$ son los polinomios de Legendre de orden n. A partir de dicho resultado, determinar el valor de la suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{+1} dx\, x^2 P_n(x) P_1(x).$$

b) Expresar la función e^x como desarrollo en serie de los polinomios de Hermite. A partir de dicho resultado, evaluar la integral

$$I_n \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-(x-\frac{1}{2})^2} H_n(x),$$

donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite de orden n.

3. ★ Resolver la siguiente ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \quad 0 \le x \le \pi$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = u_0$ y las siguientes condiciones iniciales

$$u(x,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathrm{sen}(x).$$

4. (2 puntos) **Teoría.** Define qué es un punto crítico simple y enuncia bajo qué condiciones la estabilidad de un punto crítico simple de un sistema no lineal puede determinarse a partir de la estabilidad del sistema linealizado. Da una justificación intuitiva y razonada de este resultado.

5. ★ (3 puntos) Sea el oscilador no lineal conservativo

$$\ddot{x} - x + x^3 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

Hay que hallar los puntos críticos de este sistema y determinar su tipo y estabilidad. Emplea el método de Lyapunov para determinar la estabilidad de los puntos críticos que son distintos del origen (pista: el oscilador es conservativo, es decir, su energía es constante a lo largo de las trayectorias solución). Halla la expresión general de las trayectorias solución y escribe explícitamente la ecuación de las trayectorias que pasan por el origen $(0,0)$. Haz una representación del aspecto de las trayectorias solución en el plano de fases.

6. ★ (3 puntos) Encuentra todas las soluciones de las ecuaciones integrales

a)
$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (2y + x)\varphi(y)dy$$

b)
$$\varphi(x) = 1 + \lambda \int_{-1}^{1} (2y + x)\varphi(y)dy$$

En éste último caso, emplea también el método de la serie de Neumann para hallar una estimación de orden de λ^2 de la solución.

7. (2 puntos) Halla el desarrollo asintótico completo de

$$\int_{1}^{\infty} t^{-1} e^{-x[(t-1)+2(t-1)^2]} dt, \quad x \to \infty$$