Nombre del alumno: ....

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA. Primer parcial. Curso 2001/02

1. *a*) Demuestra que $y''(x) + y'(x) + (1+\lambda)y(x) = 0$ es una ecuación de Sturm-Liouville

   b) Encuentra los autovalores λ_n y autofunciones $\psi_n(x)$ del problema de Sturm-Liouville

$$y''(x) + y'(x) + (1+\lambda)y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

   c) Encuentra la solución del problema de Sturm-Liouville inhomogéneo

$$y''(x) + y'(x) + \frac{1}{4}y(x) = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

   en la forma de desarrollo en serie de las autofunciones $\psi_n(x)$. Da la solución explícita si $f(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{sen}\,3\pi x$.

   Nota: La solución de $y''(x) + 2\beta y(x) + \omega_0^2 y(x) = 0$ es (a) $y(x) = \mathrm{e}^{-\beta x}[A\cos(\omega x) + B\,\mathrm{sen}(\omega x)]$ con $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ si $\omega_0^2 > \beta^2$, (b) $y(x) = \mathrm{e}^{-\beta x}(A + Bx)$ si $\omega_0^2 = \beta^2$, (c) $y(x) = \mathrm{e}^{-\beta x}[A\cosh(\omega x) + B\,\mathrm{senh}(\omega x)]$ con $\omega^2 = \beta^2 - \omega_0^2$ si $\omega_0^2 < \beta^2$.

2. *a*) Demuestra que las funciones esféricas de Bessel de primera y segunda especie, $j_n(x)$ y $n_n(x)$, satisfacen las relaciones de recurrencia

$$f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} f_n(x), \qquad n f_{n-1}(x) - (n+1) f_{n+1}(x) = (2n+1) f_n'(x).$$

   b) Usa estas relaciones de recurrencia para demostrar que

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x) - \frac{n+1}{x} f_n(x), \qquad f_n'(x) = \frac{n}{x} f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

   c) Usa las relaciones de recurrencia anteriores para demostrar que

$$\frac{d}{dx}[x^{n+1} f_n(x)] = x^{n+1} f_{n-1}(x), \qquad \frac{d}{dx}[x^{-n} f_n(x)] = -x^{-n} f_{n+1}(x).$$

   Nota: $j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x)$, $n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+1/2}(x)$. Las funciones $J_n(x)$ y $N_n(x)$ satisfacen las relaciones de recurrencia $F_{n-1}(x) + F_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} F_n(x)$ y $F_{n-1}(x) - F_{n+1}(x) = 2F_n'(x)$.

3. Una barra cilíndrica muy larga (para nuestros propósitos, de longitud infinita) de radio ρ inicialmente ($t = 0$) a la temperatura constante u_0 se introduce en un baño térmico cuya temperatura (constante) es u_1. Calcula de forma explícita el campo de temperaturas de la barra para cualquier instante posterior.
   Nota: $xJ_0(x) = \frac{d}{dx}[xJ_1(x)]$, $\int_0^1 x[J_0(\alpha x)]^2 dx = [J_1(\alpha)]^2/2$ siendo α un cero de $J_0(x)$

4. El método del desarrollo en autofunciones para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales no homogéneas no está limitado a ecuaciones difusivas.

   a) Resuelve la ecuación ondulatoria

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

   con las condiciones de contorno $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ y condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$ para demostrar que la solución puede escribirse como $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x)$, siendo $\phi_n(x)$ ($n = 1, 2, \cdots$) las autofunciones del problema de Sturm-Liouville $\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0$ con las condiciones de contorno $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$.

   b) Halla en la forma de serie de autofunciones $\phi_n(x)$ la solución de la ecuación diferencial no homogénea

$$\mathrm{sen}(2x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

   que satisface las condiciones de contorno $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ y las condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$. Halla la solución explícita si $f(x) = \mathrm{sen}\,3x + \frac{1}{4}\mathrm{sen}\,2x$.