Nombre del alumno: ....

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA. Primer parcial. Curso 2002/03

1. **(Teoría)** Sea la ecuación diferencial (no necesariamente una ecuación de Sturm-Liouville)

$$c_2(x)y''(x) + c_1(x)y'(x) + c_0(x)y(x) = \delta(x - x'), \quad a \leq x \leq b$$

donde $a < x' < b$ y $c_i(x)$ es una función bien comportada. Demuestra que la solución $y(x)$ es una función continua y que $y'(x)$ es continua excepto en $x = x'$. En este último caso halla el valor de la discontinuidad.

2. Halla todas las soluciones posibles (autofunciones) del problema

$$y''(x) - 2y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Expresa la función $f(x) = xe^x$ como combinación lineal de estas soluciones.

3. Los polinomios de Chebychev (de tipo II) $U_n(x)$ tienen la siguiente función generatriz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n = G(x,t) = \frac{1}{1 - 2xt + t^2}.$$

a) Halla la relación de recurrencia general que liga U_{n+1} con U_n y U_{n-1}.

b) Halla los primeros cuatro ($n = 0, 1, 2, 3$) polinomios de Chebychev.

c) Calcula $U_n(1)$, $U_n(-1)$ y $U_n(0)$.

d) Demuestra que

$$U_n(x) = (-1)^n U_n(-x).$$

4. Halla la solución de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u(r, \theta) = 0$$

a) definida en el círculo $r \leq R_1$ con las condición de contorno $u(R_1, \theta) = \cos 2\theta$. Supón que $R_1 = 1$.

b) definida en el anillo circular $R_1 \leq r \leq R_2$ con las condiciones de contorno $u(R_1, \theta) = 0$, $u(R_2, \theta) = \cos 2\theta$. Supón que $R_1 = 1$ y $R_2 = 2$.