Nombre del alumno: ....

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA. Segundo parcial. Curso 2001/02

1. Halla una fórmula explícita en difencias finitas que, con un error de discretización temporal de orden Δt y error de discretización espacial de orden $(\Delta x)^2$, permita resolver la ecuación difusiva
$$\frac{\partial u}{\partial t} = v\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
con la condición de contorno (en la izquierda)
$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = A(t).$$
Escribe explícitamente las ecuaciones de discretización en $x = 0$ y $x = 1/2$ si $A(t) = 1$, $\Delta x = 1/2$, $\Delta t = 1/2$, $v\Delta t/(2\Delta x) = P = 1/4$ y $k\Delta t/(\Delta x)^2 = S = 1/2$. Usa estas ecuaciones junto con la condición inicial $u(x, t = 0) = 1$ y de contorno (en la derecha) $u(1, t) = 1$ para hallar la solución numérica aproximada en el instante $t_2 = 2\Delta t$.

2. Sea el oscilador de van der Pol con fuerza elástica no lineal
$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x - \alpha x^2 = 0,$$
donde $\alpha \ll 1$ y $\epsilon \ll 1$. Aplica el método de balance armónico usando la solución prueba $x(t) = C + A\cos(\omega t)$ y halla relación explícita de C, A^2 y ω^2 con α. Comprueba que para $\alpha \ll 1$ estas relaciones se reducen a $C \approx 2\alpha$, $A^2 \approx 4 - 16\alpha^2$ y $\omega^2 \approx 1 - 4\alpha^2$.

3. Sea la ecuación integral
$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x + y)\varphi(y)dy.$$
   a) Halla las autofunciones y valores propios de la ecuación homogénea ($g(x) = 0$).

   b) Encuentra las soluciones (si existen) de la ecuación integral si
      1) $\lambda = 1$ y $g(x) = x$,
      2) $\lambda = 1/\pi$ y $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$,
      3) $\lambda = 1/\pi$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$.

4. Muestra que para $x \to \infty$:
$$(a) \qquad \int_x^{\infty} t^{\lambda-1}e^{-t}dt \sim x^{\lambda-1}\,\mathrm{e}^{-x}\left[1 + \frac{\lambda - 1}{x} + \cdots\right].$$
$$(b) \qquad \int_1^{\pi} \exp\left[-x\left(t + \frac{1}{t}\right)\right] dt \sim \frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-2x}}{2\sqrt{x}}.$$
Nota: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.