Nombre del alumno: ....

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA. Segundo parcial. Curso 2002/03

1. **(Teoría/Problema)** Sea la ecuación de ondas
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
con la condición inicial
$$u(x,0) = x(1-x)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$
y la condición de contorno $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Usa la fórmula en diferencias central de tres puntos de la derivada segunda para hallar una fórmula explícita que permita la resolución de esta ecuación en derivadas parciales. Expresa la condición inicial $\partial u/\partial t|_{t=0} = 0$ mediante la fórmula en diferencias central de tres puntos de la derivada primera. Usa las fórmulas anteriores para hallar una estimación numérica de $u(x,t)$ en $x = 1/3, 2/3$ para $t = 1/6, 1/3$ usando los valores de discretización $\Delta x = 1/3$ y $\Delta t = 1/6$.

2. Sea el sistema no lineal
$$\dot{x} = 6x - y + x^2$$
$$\dot{y} = \alpha x + 2y + y^2$$
con $\alpha \neq -12$.
   a) Halla el tipo de punto crítico y la estabilidad del punto $(0,0)$ en función del valor de α.
   b) Dibuja de forma aproximada las trayectorias solución en las vecindades de este punto para $\alpha = -21$ y $\alpha = 0$.
   c) Sea $\alpha = 0$. Demuestra que $(x,y) = (-6,0)$ es un punto crítico simple y determina su tipo y estabilidad.

3. Resuelve la ecuación integral
$$\varphi(x) = 1 - \int_0^\pi k(x,y)\varphi(y)dy$$
donde
$$k(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x)\cos(y), & x \leq y \\ \operatorname{sen}(y)\cos(x), & y \leq x \end{cases}$$

4. Demuestra que
$$\int_x^\infty \frac{e^{i(t-x)}}{t}\,dt = \frac{i}{x} + \frac{1}{x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
para $x \to \infty$.