Nombre del alumno: ....

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA. Examen final. Curso 2002/03

1. Sea el problema de condiciones de contorno

$$\frac{d}{dx}(xy') = x$$

donde $0 \leq x \leq 1$, $y(0) =$ finito y $y(1) = y'(1)$. Muestra que la ecuación es de Sturm-Liouville. Halla la función de Green y, a partir de ella, calcula la solución del problema anterior.

2. Halla el campo estacionario de temperaturas $u(r, \theta)$ de un cilindro homogéneo de longitud infinita y radio unidad cuya cara se fija a la temperatura $u(r = 1, \theta) = f(\theta)$. Calcula explícitamente este campo de temperaturas si $f(\theta) = \operatorname{sen} 2\theta$.

3. Halla el tipo y la estabilidad de los puntos críticos del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 8x - y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= 6x^2 - 6y. \end{aligned} \tag{1}$$

Dibuja un esquema aproximado de las trayectorias en el plano (x, y).

Nota: $x^3 - 8 = (x - 2)(x + 1 + i\sqrt{3})(x + 1 - i\sqrt{3})$.

4. Sea la ecuación integral

$$\varphi(x) = \operatorname{sen} x + \lambda \int_0^{2\pi} dt \left(\frac{1}{\pi} \cos x \cos t + \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2t \right) \varphi(t)$$

   a) Halla los autovalores y autofunciones del núcleo de esta ecuación integral (es decir, halla todas las soluciones posibles del problema homogéneo).
   b) Halla todas las soluciones posibles del problema no homogéneo. Explica los resultados mediante el teorema de la alternativa de Fredholm.