Nombre del alumno: ....

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Examen final. Curso 2003/04

1. **(Teoría)** Usa la fórmula de la derivada segunda central de tres puntos para transformar la ecuación de ondas $u_{xx} = u_{tt}$ en una relación en diferencias. Usa la fórmula de la derivada primera central de tres puntos para discretizar la condición inicial $u_t(x, 0) = g(x)$. Usa todas estas fórmulas para hallar una relación explícita que permita hallar $u_j^{(1)}$ en términos de $u_j^{(0)}$, $u_{j-1}^{(0)}$ y $u_{j+1}^{(0)}$. Escribe también la relación explícita que proporciona $u_j^{(m+1)}$ en términos de $u_j^{(m-1)}$, $u_j^{(m)}$, $u_{j-1}^{(m)}$ y $u_{j+1}^{(m)}$ para $m \geq 1$.

   Emplea estas fórmulas para resolver numéricamente la ecuación de ondas

   $$u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

   con las condiciones de contorno

   $$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

   y la condición inicial

   $$u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x,$$
   $$u_t(x, 0) = 0,$$

   y hallar el valor de la solución en $t = 1/3$ y en $t = 2/3$, empleando una discretización espacial de tamaño $\Delta x = 1/3$ y una discretización temporal de tamaño $\Delta t = 1/3$. Compara con la solución exacta.

2. Halla la solución del problema

   $$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

   con la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ y las condiciones de contorno no homogéneas

   $$u(0, t) - 2u_x(0, t) = 4,$$
   $$u(1, t) = 1.$$

   Ayuda: Usa un cambio de variable de la forma $u(x, t) = v(x, t) + u_E(x)$ donde $u_E(x) = A + Bx$, para transformar este problema en uno con condiciones de contorno homogéneas.

3. Sea el oscilador no lineal

   $$\ddot{x} + \epsilon(|\dot{x}| - 1)\dot{x} + x = 0.$$

   a) Utiliza el método de balance armónico con la función prueba $x(t) = A \cos \omega t$ para hallar de forma aproximada el ciclo límite de este oscilador.

   b) Utiliza el método de Krylov-Bogoliubov para hallar de forma aproximada este ciclo límite, determinar su estabilidad, y calcular la solución $x(t)$.

   Datos: $\int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \psi \, d\psi = 4/3$, $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \psi \, d\psi = \pi$.

4. Halla todas las soluciones posibles de la ecuación integral

   $$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 dt \, k(x, t) \, \varphi(t)$$

   donde

   $$k(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{senh}(x) \operatorname{senh}(t-1)}{\operatorname{senh} 1}, & 0 \leq x \leq t, \\ \dfrac{\operatorname{senh}(t) \operatorname{senh}(x-1)}{\operatorname{senh} 1}, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   Dato: $\cosh(x-1) \operatorname{senh}(x) - \cosh(x) \operatorname{senh}(x-1) = \operatorname{senh} 1$.