Nombre del alumno: ....

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Examen final. Curso 2004/05

1. Halla en forma de desarrollo en autofunciones y en forma cerrada la función de Green del problema

$$\begin{aligned} y'' - y &= x^2, \quad 0 \le x \le 1, \\ y(0) &= 0, \\ y(1) &= 0. \end{aligned}$$

   Usa ambas representaciones de la función de Green para calcular la solución $y(x)$ de este problema. [No es necesario evaluar de forma explícita las integrales que aparecen cuando se usa la forma cerrada para calcular $y(x)$]

2. Halla el campo estacionario de temperaturas de una superficie semiinfinita de grosor π cuya base está a temperatura $T(x)$, y sus dos lados están a temperatura cero. Es decir, resuelve el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 \le x \le \pi, \quad y \ge 0,$$

   donde $u(x,0) = T(x)$ para $0 < x < \pi$, y $u(0,y) = 0$ y $u(\pi, y) = 0$ para $y > 0$. Por supuesto $u(x,y) =$ finita.

   a) Halla la solución explícita cuando $T(x) = T_0$ siendo T_0 una constante.

   b) Resuelve el problema si ambos lados están a la temperatura constante u_0, es decir, si $u(0,y) = u_0$ y $u(\pi, y) = u_0$ para $y > 0$. Escribe la solución explícita si $T(x) = T_0 + u_0$.

   c) Resuelve el problema si un lado está a la temperatura constante u_0 y el otro a la temperatura constante u_1, es decir, si $u(0,y) = u_0$ y $u(\pi, y) = u_1$ para $y > 0$. Escribe la solución explícita si $T(x) = T_0 + u_0 + \frac{u_1 - u_0}{\pi} x$.

3. Halla la solución aproximada mediante el método de Krylov-Bogoliobuv del oscilador no lineal

$$\ddot{x} + x + \epsilon(\dot{x} + x^n) = 0$$

   donde n es un número natural ($n = 0, 1, 2, \cdots$).
   Nota: $\int_0^{2\pi} \cos^m(x) dx = 2\pi (m-1)!!/m!!$ si m es un entero par mayor que cero.

4. Halla todas las soluciones posibles de la ecuación integral

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{1} dt\, x(x-t)\, \varphi(t) = x.$$

5. Halla el término asintótico dominante de

$$I(x) = \int_0^\infty dt\, \exp\left(-\frac{1}{2} t^2 + xt\right)$$

   para $x \to \infty$.