Nombre del alumno: ....

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Examen final. Curso 2006/07

1. *a*) Halla todas las soluciones posibles (autofunciones) del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y = 0, &\quad 0 \le x \le 1, \\ y(0) = 0, & \\ y(1) - hy'(1) = 0. & \end{aligned}$$

   donde (i) $h = 1/2$, (ii) $h = 1$, y (iii) $h = 2$.

   b) Sea el problema

$$\begin{aligned} y'' + \mu y = f(x), &\quad 0 \le x \le 1, \\ y(0) = 0, & \\ y(1) - 2y'(1) = 0. & \end{aligned}$$

   ¿Tiene, en general, solución este problema si $\mu = 1$? ¿Y si $\mu = 1{,}35853$? ¿Por qué? Escribe una función $f(x)$ para la cual el problema anterior con $\mu = 1{,}35853$ sí tenga solución y justifica la respuesta.

2. Sea un cilindro de radio ρ cuya superficie esta fijada a un potencial $V(r = \rho, \theta) = f(\theta)$. Se pide calcular el potencial en su exterior asumiendo que éste es muy largo de modo que podemos despreciar los efectos de los extremos y asumir que el potencial buscado no depende de la posición z a lo largo del cilindro. Calcúlese la solución de forma explícita si $f(\theta) = \sin(2\theta)$. [Nota: el potencial buscado es finito para $r \to \infty$.]

3. Una partícula se mueve en el plano $x - y$ de acuerdo a las ecuaciones de movimiento

$$\dot{x} = 1 - x^2, \quad \dot{y} = 1 - y^2.$$

   a) Hallar los puntos críticos. ¿Son puntos críticos simples? Determina su tipo y analiza su estabilidad.

   b) Representa en el plano $x - y$ un esquema aproximado de las diferentes trayectorias.

   c) Hallar la ecuación de las trayectorias $y = f(x)$ que unen los puntos críticos entre sí.

4. Encuentra todas las soluciones posibles de la ecuación integral homogénea

$$f(x) - \lambda \int_0^{\pi} dt\, K(x,t)\, f(t) = 0,$$

   para todos los posibles valores de λ cuando

$$K(x,t) = \begin{cases} \cos x \operatorname{sen} t, & 0 \le x \le t \\ \cos t \operatorname{sen} x, & t \le x \le \pi\,. \end{cases}$$

5. Hallar la conducta asintótica principal cuando $x \to \infty$ de la integral

$$\int_1^2 \exp\left[-x\left(t + \frac{1}{t}\right)\right] \ln(1+t)\, dt.$$