Nombre del alumno: ....

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Examen extraordinario de septiembre. Curso 2004/05

1. *a*) Expresa la función $\exp(2x-1)$ como serie de polinomios de Hermite.

   b) Calcula
   $$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-(x-1)^2} \frac{dH_n}{dx}$$
   donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite.

2. Resuelve el problema
   $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6x, \qquad -1 \le x \le 1, \quad t \ge 0,$$
   donde $u(x,0) = 0$ para $-1 < x < 1$, y $u(\pm 1, t) = 0$ para $t > 0$.

3. Halla el tipo y la estabilidad de los puntos críticos del sistema
   $$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 8x - y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= 6x^2 - 6y. \end{aligned} \tag{1}$$
   Dibuja un esquema aproximado de las trayectorias en el plano (x, y).

   Nota: $x^3 - 8 = (x-2)(x+1+i\sqrt{3})(x+1-i\sqrt{3})$.

4. *a*) Resuelve la ecuación integral
   $$\varphi(x) = 1 - \int_0^{\pi} k(x,y)\varphi(y)dy$$
   donde
   $$k(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x)\cos(y), & x \le y \\ \operatorname{sen}(y)\cos(x), & y \le x \end{cases}$$

   b) Halla los dos primeros términos del desarrollo asintótico de
   $$\int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \quad \text{para} \quad x \to \infty.$$