Nombre del alumno: ....

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Examen extraordinario de septiembre. Curso 2005/06

1. *a*) Halla todas las soluciones posibles (autofunciones) $\psi_n(x)$ del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + \lambda y = 0, &\quad 0 \le x \le 1, \\ y(0) = 0,& \\ y'(1) = 0.& \end{aligned}$$

   Escribe explícitamente las tres primeras autofunciones de este problema.

   b) Halla la solución de

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-3x}, &\quad 0 \le x \le 1, \\ y(0) = 0,& \\ y'(1) = 0& \end{aligned}$$

   en la forma de un desarrollo de las autofunciones $\psi_n(x)$. Haz lo mismo si la ecuación es (i) $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-3x}$; (ii) $y'' + 2y' + (1 + z_1^2)y = \mathrm{e}^{-3x}$.

   Datos: $\tanh z = z$ tiene por única solución a $z = 0$. La raíces positivas más pequeñas de de $\tan z = z$ son $z_1 \simeq 4{,}49341$, $z_2 \simeq 7{,}72525$, $z_3 \simeq 10{,}9041$, $z_4 \simeq 14{,}0662$,...

2. Halla la posición $u(x,t)$ de una cuerda semiinfinita ($x \ge 0$) inicialmente en reposo cuyo extremo en $x = 0$ se mueve según la función $u(0,t) = \operatorname{sen}(t)$. Es decir, encuentra la solución de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

   que satisface la condición inicial

$$u(x,0) = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$

   y las condiciones de contorno

$$u(0,t) = \operatorname{sen}(t), \qquad u(x \to \infty, t) = 0.$$

3.

4.