**Nombre del alumno:** ..........................................................................................

# MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Examen extraordinario de septiembre. Curso 2003/04

1. **(Teoría)** Usa la fórmula de la derivada segunda central de tres puntos para transformar la ecuación de ondas $u_{xx} = u_{tt}$ en una relación en diferencias. Usa la fórmula de la derivada primera central de tres puntos para discretizar la condición inicial $u_t(x, 0) = g(x)$. Usa todas estas fórmulas para hallar una relación explícita que permita hallar $u_j^{(1)}$ en términos de $u_j^{(0)}$, $u_{j-1}^{(0)}$ y $u_{j+1}^{(0)}$. Escribe también la relación explícita que proporciona $u_j^{(m+1)}$ en términos de $u_j^{(m-1)}$, $u_j^{(m)}$, $u_{j-1}^{(m)}$ y $u_{j+1}^{(m)}$ para $m \geq 1$.

   Emplea estas fórmulas para resolver numéricamente la ecuación de ondas

   $$u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

   con las condiciones de contorno

   $$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

   y la condición inicial

   $$\begin{aligned} u(x, 0) &= \operatorname{sen} \pi x, \\ u_t(x, 0) &= 0, \end{aligned}$$

   y hallar el valor de la solución en $t = 1/3$ y en $t = 2/3$, empleando una discretización espacial de tamaño $\Delta x = 1/3$ y una discretización temporal de tamaño $\Delta t = 1/3$. Compara con la solución exacta.

2. Halla la función de Green en forma de desarrollo de autofunciones del problema de Sturm-Liouville no homogéneo

   $$\frac{d^2 y}{dx^2} - \alpha^2 y(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \alpha^2 > 0,$$

   con las condiciones de contorno $y(0) + y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

3. Halla la temperatura estacionaria $u(r, \theta)$ en todo punto de un disco homogéneo de radio $r = 1$ aislado por sus caras y cuyo borde tiene una temperatura dada por la función $u(r = 1, \theta) = f(\theta)$, es decir, resuelve el problema

   $$\begin{aligned} \nabla^2 u(r, \theta) &= 0, \qquad 0 \leq r \leq 1, \\ u(r = 1, \theta) &= f(\theta). \end{aligned}$$

   Halla la forma explícita del campo de temperaturas $u(r, \theta)$ si $f(\theta) = 2 \operatorname{sen} \theta$.

4. Halla los autovalores y autofunciones de la ecuación integral

   $$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} dt\, k(x, t)\, \varphi(t)$$

   donde

   $$k(x, t) = \begin{cases} \cos(x) \operatorname{sen}(t), & 0 \leq x \leq t, \\ \cos(t) \operatorname{sen}(x), & t \leq x \leq \pi. \end{cases}$$