Nombre del alumno: ....

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA. Examen final. Curso 2001/02

1. Sea el problema de Sturm-Liouville
$$y''(x) + y(x) = \cos(x), \qquad y'(0) = 0, \quad y(2\pi) = 0.$$
   a) Halla la función de Green en forma cerrada.
   b) A partir de la función de Green obtén la solución del problema no homogéneo.

2. En este problema se ha de demostrar que las funciones asociadas de Legendre
$$P_l^{(m)} = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$
[$P_l(x)$ son los polinomios de Legendre] son soluciones de la ecuación asociada de Legendre
$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - x^2}\right] y = 0.$$
Para ello:
   a) Sustituye la expresión $y(x) = (1-x^2)^{m/2}u(x)$ en la ecuación asociada de Legendre para demostrar que esta ecuación es equivalente a
$$(1 - x^2)u''(x) - 2(m+1)xu'(x) + [l(l+1) - m(m+1)]u(x) = 0. \tag{1}$$
   b) Deriva m veces en la ecuación de Legendre
$$(1 - x^2)P_l'' - 2xP_l' + l(l+1)P_l = 0$$
   para demostrar que $u(x) \equiv \dfrac{d^m}{dx^m} P_l(x)$ satisface la ecuación (**??**).

3. Halla los puntos críticos del sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 1 + xy. \end{cases} \tag{2}$$
Determina su tipo y estabilidad. Dibuja en el plano de fases (x, y) las trayectorias solución en las vecindades de los puntos críticos. Dibuja el campo vectorial de las pendientes de las trayectorias sobre los ejes. Halla las líneas en las que las pendientes de las trayectorias son nulas e infinitas. Utiliza toda esta información para dibujar de forma aproximada las trayectorias solución del sistema no lineal (**??**).

4. Encuentra todas las soluciones posibles de la ecuación integral
$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 \operatorname{sen}(\ln x)\varphi(y)dy$$
cuando (a) $g(x) = 0$, (b) $g(x) = 2x$, y (c) $g(x) = x - 1/2$. Explica los resultados teniendo en cuenta el teorema de la alternativa de Fredholm.
Nota: $\int_0^1 \operatorname{sen}(\ln x)dx = -1/2$.

5. Resuelve numéricamente la ecuación
$$y''(x) + \frac{\pi^2}{4} y(x) = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$
mediante:
   a) El método de diferencias finitas, usando el discretizado $\Delta x = 1/3$.
   b) El método del disparo.

   Compara con la solución exacta.