Nombre del alumno: ....

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Examen extraordinario de septiembre. Curso 2001/02

1. Sea el problema inhomogéneo
$$y'' = \cos(3x)\ , \qquad 0 \leq x \leq \pi/2\ ,$$
con $y'(0) = 0$ e $y(\pi/2) = 0$.
   a) Halla la función Green del problema en forma cerrada.
   b) Halla la función de Green como desarrollo de la autofunciones asociadas al problema.
   c) Usa la función de Green (en forma cerrada y en forma de desarrollo en autofunciones) para hallar la solución del problema inhomogéneo anterior: $y'' = \cos(3x)$, $y'(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$.
   d) Halla, si existe, la solución del problema $y'' + 4y = \cos(3x)$, $y'(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$.
   e) Halla, si existe, la solución del problema $y'' + 9y = \cos(3x)$, $y'(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$.

2. Se pide calcular el campo estacionario de temperaturas de una superficie semiinfinita de grosor π cuya base está a temperatura $T(x)$, uno de sus lados a temperatura u_0 y el otro a temperatura u_1. Es decir, resuélvase el problema
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
donde $u(x, 0) = T(x)$ para $0 < x < \pi$, y $u(0, y) = u_0$ y $u(\pi, y) = u_1$ para $y > 0$. Por supuesto $u(x, y) =$ finita. Halla la solución explícita cuando
$$T(x) = T_0 + u_0 + \frac{u_1 - u_0}{\pi}x,$$
siendo T_0 una constante.

3. Halla la solución aproximada mediante el método de Krylov-Bogoliobuv del oscilador no lineal
$$\ddot{x} + x + \epsilon(\dot{x} + x^n) = 0$$
donde n es un número natural ($n = 0, 1, 2, \cdots$).
Nota: $\int_0^{2\pi} \cos^m(x)dx = 2\pi(m-1)!!/m!!$ si m es un entero par mayor que cero.

4. Muestra, de forma razonada, que:
$$(a) \qquad \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}dt \sim \left(-\frac{1}{x} + \frac{2!}{x^3} + \cdots\right)\operatorname{sen} x + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \cdots\right)\cos x$$
$$(b) \qquad \int_{-\infty}^\infty e^{-xt^2}\ln(3 + t^2)dt \sim \frac{\sqrt{\pi}\ln 3}{\sqrt{x}}.$$
para $x \to \infty$.
Nota: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.