

Nombre del alumno: .....

### MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Examen final. Curso 2006/07

1. a) Halla la función de Green en forma de desarrollo en autofunciones del problema

$$\begin{aligned}y''(x) + \alpha y(x) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\y(0) &= 0, \\2y(1) - y'(1) &= 0.\end{aligned}$$

Escribe la solución  $y(x)$  si  $\alpha = 1$  para una función  $f(x)$  genérica. Halla la solución si  $\alpha = 1$  y  $f(x) = \sin \beta_1 x$ . (No es preciso calcular explícitamente el valor de la norma de las autofunciones).

- b) ¿Tiene, en general, solución la ecuación  $y''(x) + \beta_2^2 y(x) = f(x)$ ? Explica qué sucede si, en este caso,  $f(x) = (x - 1/2)/\sin(\beta_2 x)$ .

Datos:  $\tanh x = x/2$  tiene por única solución a 1,91501. La ecuación  $\tan x = x/2$  tiene las soluciones  $\beta_1 = 4,27478$ ,  $\beta_2 = 7,59655$ ,  $\beta_3 = 10,8127, \dots$

2. Se pide hallar el potencial eléctrico en el interior de dos casquetes semiesféricos de radio  $\rho$  unidos mediante un aislante en el plano  $z = 0$ , uno de ellos fijado a un potencial  $+V_0$  y el otro a un potencial  $-V_0$ . Es decir, se pide hallar la solución del problema  $\nabla^2 V(r, \theta) = 0$  con las condiciones de contorno

$$V(\rho, \theta) = \begin{cases} +V_0, & 0 \leq \theta < \pi/2 \\ -V_0, & \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases}$$

Pista: Para identificar la ecuación en la variable angular  $\theta$ , exprese esta en términos de  $x = \cos \theta$ , es decir, hágase el cambio de variable  $x = \cos \theta$ .

Datos:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx &= \int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}, \\ \int_0^1 P_n(x) dx &= \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2+n/2)\Gamma(1-n/2)}, \quad n = 1, 3, 5, \dots\end{aligned}$$

3. a) Identifique el núcleo y determine los autovalores y autofunciones de la ecuación integral:

$$\phi(x) = \lambda \int_{-1}^1 dy (x^2 + y^2 + xy) xy \phi(y)$$

- b) Considere ahora la ecuación integral:

$$\phi(x) = x^3 + \lambda \int_{-1}^1 dy (x^2 + y^2 + xy) xy \phi(y)$$

Explique razonadamente para cuáles de los autovalores  $\lambda_i$  encontrados en el apartado anterior existe solución a esta ecuación si  $\lambda = \lambda_i$ , y escriba esa solución.

4. Halle el término dominante del desarrollo asintótico de las siguientes integrales para  $x \rightarrow \infty$ :

- a)

$$I(x) = \int_0^1 dt e^{-xt} \frac{2}{t} \log(1+t^3)$$

- b)

$$I(x) = \int_{2\pi}^\infty dt t^{-x} e^{-xt^2} \cos t$$