MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Examen final. 13 de junio de 2008

1. *a*) Demostrar que el problema
$$y'' - 2y' + \lambda y = 0, \quad 0 \le x \le \pi,$$
con $y(0) = 0$ e $y(\pi) = 0$ es equivalente a un problema de Sturm-Liouville.

   b) Hallar las autofunciones y los autovalores correspondientes.

   c) Hallar el desarrollo de la función $f(x) = e^x$ en serie de estas autofunciones.

2. *a*) Expresar la función e^{2x-1} como serie de los polinomios de Hermite $H_n(x)$.

   b) Calcular
$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-(x-1)^2} \frac{dH_n(x)}{dx}.$$

   Nota: La función generatriz de los polinomios de Hermite es $G(x,t) = e^{2xt-t^2}$.

3. Resolver la siguiente ecuación de ondas
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t), \quad 0 \le x \le \pi$$
sujeta a las condiciones iniciales
$$u(x,0) = \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0,$$
y las condiciones de contorno $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

4. Consideremos el siguiente oscilador no lineal
$$\ddot{x} + \epsilon(|\dot{x}| - 1)\dot{x} + x = 0$$

   a) Utilizar el método de Krylov-Bogoliubov para hallar la forma aproximada de este ciclo límite.

   b) Estudiar la estabilidad del ciclo límite.

   c) Calular la solución aproximada $x(t)$.

   Datos: $\int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \psi \, d\psi = \frac{4}{3}$, $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \psi \, d\psi = \pi$, $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a} \ \ln \frac{x}{a+bx}$

5. Hallar las soluciones de la ecuación integral
$$f(x) - \lambda \int_{-1}^{1} x(x-t)\, f(t)\, dt = 0,$$
para todos los posibles valores del parámetro λ.

6. *a*) Encontrar los dos primeros términos del desarrollo asintótico para $x \to \infty$ de la integral

$$I(x) = \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt \qquad x \to \infty.$$

b) Hallar los dos primeros términos del desarrollo asintótico para $x \to \infty$ de la integral

$$I(x) = \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(xt^2)\ \operatorname{tg}^2(t)\, dt, \qquad x \to \infty.$$

Dato:

$$\int_0^\infty ds\, e^{-xs^2}\ s^n = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) x^{-(n+1)/2}$$

OPCIONES

- Alumnos que se presenten a toda la asignatura: problemas 1, 3, 4 y 6.
- Alumnos que se presenten al primer parcial: problemas 1, 2 y 3.
- Alumnos que se presenten al segundo parcial: problemas 4, 5 y 6.