

Nombre del alumno:

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA
Examen extraordinario de septiembre. Curso 2006/07

1. Sea el problema

$$\begin{aligned}x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) &= 1, & 1 \leq x \leq e^{\pi/2} \\ y(1) &= 0, \\ y(e^{\pi/2}) &= 0.\end{aligned}$$

- a) Escriba la ecuación en términos del operador de Sturm-Liouville correspondiente.
- b) Halle la función de Green en forma cerrada.
- c) Emplee esta función de Green para hallar la solución $y(x)$ del problema.

2. Halle mediante separación de variables la solución de la ecuación difusiva

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - u$$

que satisface las condiciones de contorno $u(0, t) = u(1, t) = 0$ y la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$. Halle la solución explícitamente para $f(x) = \text{sen}(2\pi x)$.

3. a) Sea el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - ay, \\ \dot{y} &= 4x + 2y.\end{aligned}$$

Asumiendo que el único punto crítico es $(0,0)$, halle las propiedades del mismo en función del valor de a .

b) Encuentre una función de Liapunov para el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(x + y^4), \\ \dot{y} &= 2x^3 y^3 - y.\end{aligned}$$

¿Qué se puede decir acerca de la estabilidad no lineal en torno a $(0,0)$?

4. a) Halle el término dominante del desarrollo asintótico, para $x \rightarrow \infty$, de las integrales:

$$\begin{aligned}I(x) &= \int_0^{\pi/2} dt (t+1) e^{-x \text{sen}^2 t}, \\ I(x) &= \int_0^1 dt \cos t e^{ixt^3}.\end{aligned}$$

b) Resuelva la siguiente ecuación integral, suponiendo que λ no es autovalor de la ecuación homogénea asociada:

$$f(x) = e^x + \lambda \int_0^1 dy xy e^{x+2y} f(y).$$

¿Existe solución de esta ecuación para cualquier valor de λ que no sea autovalor?