

# MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Examen extraordinario de septiembre. 15/09/2008

1. Consideremos el siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$y''(x) + y(x) = \cos(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

con  $y'(0) = 0$  e  $y(2\pi) = 0$ .

- Hallar la función de Green en forma cerrada.
- Encontrar la solución del problema inhomogéneo a partir de la función de Green anterior.

2. Hallar el valor de la siguiente integral

$$I_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} x^3 H_n(x) H_m(x),$$

donde  $H_n(x)$  son los polinomios de Hermite de orden  $n$ .

3. Resolver mediante el método de separación de variables la siguiente ecuación de difusión

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t > 0,$$

sujeta a las condiciones de contorno  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  y las condiciones iniciales (a)  $u(x, 0) = \sin(x)$ ; (b)  $u(x, 0) = \sin(x) + \sin(2x)$ .

4. Resolver la siguiente ecuación integral

$$1 - f(x) = \int_0^\pi k(x, y) f(y) dy,$$

donde el núcleo  $k(x, y)$  está definido como

$$k(x, y) = \begin{cases} \sin(x) \cos(y), & x \leq y \\ \sin(y) \cos(x), & y \leq x \end{cases}$$

5. a) Encontrar los dos primeros términos del desarrollo asintótico para  $x \rightarrow \infty$  de la integral

$$I(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad x \rightarrow \infty.$$

b) Hallar los dos primeros términos del desarrollo asintótico para  $x \rightarrow \infty$  de la integral

$$I(x) = \int_0^{\pi/4} \sin(xt^2) \operatorname{tg}^2(t) dt, \quad x \rightarrow \infty.$$

Dato:

$$\int_0^\infty ds e^{-xs^2} s^n = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) x^{-(n+1)/2}$$