Nombre del alumno:

MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Examen extraordinario de septiembre. 15 de septiembre de 2009

1. Halla en forma cerrada la función de Green del problema

$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) = x$$

con las condiciones de contorno $y(0) =$ finito, $y(1) + y'(1) = 0$. Usa la función de Green obtenida para calcular la solución $y(x)$ de este problema.

2. ★ Evaluar la integral

$$I_n \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{x(1-x)} H_n(x),$$

donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite de orden n.

3. Encontrar la solución de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \geq 0$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = \mathrm{sen}(t)$, $u(\infty, t) = 0$ y las siguientes condiciones iniciales

$$u(x,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

4. Sea el oscilador de van der Pol generalizado

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x - x^3 = 0$$

a) Se pide hallar la estabilidad de la solución nula $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ y el tipo de las trayectorias solución en las vecindades de este punto en función del valor del parámetro μ. Sugerencia: transforma la ecuación anterior en un un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden sobre la posición x y la velocidad $\dot{x} \equiv y$.

b) Emplea el método de balance armónico para hallar una solución aproximada de este oscilador cuando $\mu = 0$. ¿Es válida esta solución para cualquier valor de la amplitud? Da una interpretación física de este hecho.

5. Halla las soluciones de las ecuaciones integrales

a)

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^{2\pi} |\pi - y|\ \mathrm{sen}(x)\, \varphi(y)\, dy$$

b)

$$\int_0^x e^{x-y}\, \varphi(y)\, dy = x^2$$

6. ★ Halla el desarrollo asintótico completo de la integral

$$\int_1^2 \ln(t)\, e^{-x(t-1)}\, dt$$

para $x \to \infty$.