Las matemáticas y su entorno

Raymundo Bautista Ramos, J. Rafael Martínez Enríquez y Pedro Miramontes (coordinadores)

Mariano López de Haro, Marcos Rosenbaum, Pedro Miramontes, Enrique Merino Pérez, J. Andrés Christen, Víctor Alfredo Bustos y de la Tijera, Antonmaría Minzoni, Javier Bracho, Carlos Álvarez J., J. Rafael Martínez Enríquez

ÍNDICE

FÍSICA Y MATEMÁTICAS: UNA VISIÓN DESDE LA FÍSICA TEÓRICA*

MARIANO LÓPEZ DE HARO**

INTRODUCCIÓN

Cuando acepté participar en el ciclo de mesas redondas y conferencias "Reflexiones sobre las matemáticas y sus conceptos" y, posteriormente, proporcionar una versión escrita de mi ponencia, no era plenamente consciente de la dificultad de dirigirme a un sector de la comunidad universitaria y nacional distinto de mi ámbito natural de trabajo. Ciertamente, el hecho de poseer las licenciaturas en física y matemáticas me sitúa en una postura relativamente cómoda para referirme a la relación entre ambas ciencias desde la perspectiva de mi actividad científica, pero hacerlo en un lenguaje accesible a un público general me resulta bastante difícil. Así pues, para facilitarme la tarea y con la esperanza de que este camino sea relativamente exitoso, tomé la decisión de "pedir prestadas" ideas y aportaciones de personalidades científicas que, a mi juicio, han expresado con gran lucidez conceptos que comparto plenamente e intentar darles una estructura coherente intercalando comentarios propios. En la medida de lo posible, he procurado que la bibliografía citada sea de fácil acceso y que, aun estando muy lejos de ser una lista exhaustiva, al menos sirva como una buena primera aproximación a la temática de la interacción de las matemáticas con la física. Desde el punto de vista de la filosofía de la ciencia, el problema también ha sido abordado con anterioridad y una referencia obligada es sin duda el trabajo de Reichenbach (1945). En éste se señala que la diferencia

* Versión escrita y ampliada de la ponencia presentada por el autor durante la mesa redonda "Física y matemáticas", del ciclo "La interacción de las matemáticas con otras disciplinas" celebrado el 2 de abril de 1998, en el Centro de Investigaciones Interdisciplinarias en Ciencias y Humanidades de la UNAM.

** Centro de Investigación en Energía, UNAM.

entre física y matemáticas es de tipo fundamental, ya que la segunda no es una ciencia natural sino que muestra las conexiones conceptuales que deben tenerse en cuenta en el conocimiento de la naturaleza. En ese sentido, Reichenbach afirma que la matemática es el "instrumento universal de la física", aunque admite que la distinción entre ambas disciplinas puede resultar a veces incierta.

Para proceder, he dividido la presentación en varios apartados cuyos títulos intentan reflejar tanto el contenido como la secuencia en la que abordé este tema. Empiezo con una pregunta básica.

¿QUÉ SON LAS MATEMÁTICAS?[1]

La respuesta a esta pregunta ha ido evolucionando con el tiempo. Hasta cerca de 500 años a. C. podría afirmarse que las matemáticas se restringían al estudio de los números. En la época de los griegos, con su énfasis en la geometría, el estudio comprendía los números y las formas. Una de las características más importantes de las matemáticas griegas, que desde luego ha ejercido una influencia enorme, es lo que podríamos denominar la tendencia teórica y axiomática. No obstante, cabe señalar también que las aplicaciones y conexiones con la realidad física desempeñaron un papel igualmente relevante en el desarrollo de las matemáticas de la antigüedad y que en muchas ocasiones fue preferido un modo de exposición menos rígido que el de Euclides (Courant y Robbins, 1971). En particular, en la tradición babilónica, la cual podría afirmarse como la otra forma de pensamiento que también ha trascendido en matemáticas y en la que también estaban presentes los números y las formas, los estudiantes aprendían practicando con numerosos ejemplos hasta que retenían la regla general. El método estaba orientado a calcular cosas y era fundamental saberlo todo sobre los diferentes teoremas y muchas de las conexiones existentes entre ellos, pero no era necesario haber

[1] Recomiendo al lector que, además de las referencias explícitas de este apartado, vea el ameno libro de K. J. Devlin (1994) de donde he entresacado algunos conceptos.

constatado nunca que todo se podía obtener a partir de unos cuantos axiomas.

La noción de que las matemáticas se restringían al estudio de los números y las formas se mantuvo prácticamente sin cambios hasta mediados del siglo XVII, en el que Newton y Leibnitz, independientemente, inventaron el cálculo, añadiendo por ende a los números y las formas el estudio del movimiento, la razón de cambio y el espacio. Ésta fue la respuesta matemática a una visión mecanicista del mundo. Para ello se contó con la gran contribución previa de Descartes y Fermat, quienes casi simultáneamente desarrollaron la geometría analítica (Boyer, 1995). La mayor parte del trabajo inicial que utilizaba el cálculo fue dirigido hacia el estudio de problemas físicos. De hecho, muchos de los grandes matemáticos de este periodo pueden igualmente ser considerados excelentes físicos. Podría decirse que se llega a una concepción instrumental de las matemáticas en la que los cálculos deben servir, sobre todo, para resolver problemas concretos. En este espíritu se exigirá que las matemáticas sean útiles, radicando en el fondo la importancia en el éxito de las soluciones, aunque en el camino la cohesión del edificio matemático pueda verse algo maltrecha. En esta posición pragmática, independientemente de la complicación de un problema dado, para abordarlo se utiliza el método que lleve a la solución con la menor dificultad (Brunet, 1971).

A partir de la mitad del siglo XVIII, el interés por la propia matemática, más allá de sus aplicaciones, fue creciendo a medida que los matemáticos procuraron entender y profundizar en las razones del gran poderío del cálculo. De esta forma, para finales del siglo XIX, las matemáticas se concebían como el estudio de los números, las formas, el movimiento, la razón de cambio y el espacio, y de las herramientas matemáticas que se utilizan en estos estudios. Durante el siglo XX, la actividad matemática ha sido muy amplia y variada, y cada vez más se piensa que algún tema cae dentro del ámbito de las matemáticas si utiliza la metodología de esta disciplina. Así, muy recientemente y más allá de la respuesta tópica de que las matemáticas son lo que hacen los matemáticos, se puede decir que la matemática es la ciencia de los patrones, es decir, de los diseños y las formas, incluyendo no solamente el aspecto externo, sino también las simetrías, regularidades y patrones escondidos o internos, o la ausencia de los mismos.

Independientemente de todas las facetas y de las innumerables conexiones que las matemáticas tienen entre sus diversas ramas y con otras disciplinas, es un hecho que constituyen un cuerpo sólido e integrado de conocimientos. Cualquier estudio matemático de un fenómeno guarda muchas similitudes con otros estudios matemáticos de otros fenómenos. Esquemáticamente, el proceso es el siguiente: al principio se hace una simplificación inicial del problema en la que los conceptos fundamentales son identificados y aislados. A continuación, dichos conceptos se analizan cada vez con mayor profundidad al tiempo que se descubren e investigan los patrones relevantes. Puede haber entonces algún intento de axiomatización y se incrementa el nivel de abstracción. Enseguida se formulan y prueban teoremas. Posteriormente, se develan, se sugieren o se sospechan las conexiones con otras partes de las matemáticas. Finalmente, la teoría se generaliza, lo cual conduce al descubrimiento de nuevas similitudes y, posiblemente, a la conexión con ramas adicionales de las matemáticas.

Hechos estos comentarios, antes de entrar a la relación que las matemáticas tienen con la física, es conveniente también señalar algunos aspectos de esta última disciplina.

FÍSICA TEÓRICA Y FÍSICA EXPERIMENTAL[2]

En términos muy generales, puede decirse que el objetivo de la física es el conocimiento de la naturaleza. Sin embargo, es muy claro que existen otras disciplinas que persiguen el mismo fin y, por lo tanto, para distinguirlas es necesario fijarse o bien en la diversidad de los objetos que estudian o bien en la de los métodos que emplean. Lo mismo puede hacerse en el caso de las subdisciplinas. Así, la física puramente experimental restringe generalmente su ámbito a mostrar fenómenos naturales y a la descripción cuidadosa de lo que ocurre en ellos. En contraste, en el momento en el que uno se pregunta las

[2] El contenido de este apartado ha sido elaborado con material extraído fundamentalmente del prólogo del libro de G. Joss (1964).

razones por las cuales los fenómenos naturales ocurren, se penetra en los dominios de la teoría. Sobre la base de hipótesis razonables que admiten una comprobación más o menos directa, el físico teórico intenta establecer relaciones entre los fenómenos observados y determinar su origen básico, y construir así un ordenamiento lógico y sistemático de una gran cantidad de material observacional.

Generalmente, también desde el punto de vista teórico, un fenómeno no es considerado necesariamente como simple aunque sea relativamente sencillo producirlo experimentalmente. Por otra parte, es igualmente cierto que muchas veces la teoría llevaría a tareas prácticamente imposibles de realizar experimentalmente. Pero la comprensión teórica de un fenómeno también puede evitar el tener que realizar experimentos difíciles o costosos, por ejemplo, a través de la determinación indirecta de magnitudes experimentalmente inaccesibles.

Si nos preguntamos de dónde surgen las hipótesis concernientes a las relaciones entre cantidades físicas individuales y fenómenos, la respuesta última nos remite inevitablemente al experimento. Un físico teórico debe ser capaz de deducir de la evidencia conocida las relaciones que conectan diversas magnitudes involucradas en el fenómeno y, de allí, inferir conclusiones que puedan, entre otras cosas, sugerir nuevos experimentos. Así pues, ninguna teoría que reclame solidez científica puede ser ajena a la evidencia experimental. Por otra parte, la experiencia demuestra ampliamente que cuando se presenta una discrepancia entre los resultados de una teoría bien establecida y los datos experimentales, por igual se reexaminan los cálculos teóricos que se busca un posible error en el procedimiento experimental, pues se da por sentado que en principio la teoría fue construida en plena concordancia con algunas observaciones experimentales previas. Y, aunque es verdad que el elemento fundamental del enfoque teórico es la búsqueda de relaciones entre hechos y variables físicas, un aspecto igualmente importante es el poder formular estas relaciones matemáticamente. Lo cual es precisamente parte del tema que nos ocupa. Así, las matemáticas representan una herramienta fundamental para la física teórica, y su uso supone una racionalización del pensamiento, pues lo subyacente es que el proceso de obtener conclusiones importantes a partir de las hipótesis iniciales descansa en las bases confiables de las reglas de cálculo reconocidas, establecidas e inmutables. Aquí cabe aclarar que los propios cálculos tienen su significado y que claramente el físico teórico elige en principio apoyarse en los resultados sólidos que le aportan los matemáticos, más que preocuparse por proporcionar pruebas rigurosas desde el punto de vista formal. Pero de la misma forma, no resulta tampoco raro que, aún en el caso en el que deba desarrollar alguna herramienta matemática particular inexistente hasta ese momento, si los resultados son relativamente evidentes desde el punto de vista físico, el físico teórico no suele preguntarse acerca de teoremas de existencia que el matemático sí que debe probar. Se llega incluso al extremo de que algunas veces puede darse una contradicción entre los hechos físicos y los requisitos estrictos de la matemática pura. En estos casos, el físico teórico sacrifica rigor en aras de operatividad, siendo su juez último y a la vez su mejor sustento la evidencia experimental.

No debe quedar la impresión de que se puede hacer una separación tajante entre física teórica y experimental, pues una visión lógicamente ordenada de la naturaleza solamente puede obtenerse de la utilización de ambos enfoques de forma complementaria. Lo mismo puede decirse acerca del uso de las matemáticas en la física teórica. No se trata únicamente de una herramienta de cálculo ni tampoco de un lenguaje apropiado. Se trata, además, de algo que nos permite razonar. Tomando por ejemplo el caso del análisis vectorial, que fue desarrollado en su mayor parte por físicos, no cabe ninguna duda que el contenido conceptual de esta disciplina matemática es tan rico desde el punto de vista de la física, que muchas leyes solamente muestran su significado completo al ser expresadas en el lenguaje de los vectores. Un caso concreto es la teoría electromagnética sintetizada en las leyes de Maxwell. Por ello, como sucede con otras ramas de las matemáticas, sería un error (que desgraciadamente algunos físicos inexpertos suelen cometer) el considerar al análisis vectorial únicamente como una herramienta simplificadora de los cálculos.

Con estos antecedentes, ilustremos ahora, tomando como ejemplo un personaje muy connotado, algunas de las dificultades que se enfrentan al intentar establecer una división tajante entre la física y las matemáticas.

ISAAC NEWTON, ¿FÍSICO O MATEMÁTICO?

En la Abadía de Westminster, en Londres, hay una tumba en cuyo epitafio se lee: "Mortals, congratulate yourselves that so great a man has lived for the honor of the human race".[3] El individuo al que hace referencia el epitafio es desde luego Isaac Newton, quien nació en 1642. Se dice que debido a su personalidad, la cual denotaba un miedo atroz a las críticas externas, retrasó mucho tiempo la publicación de sus descubrimientos (Devlin, 1994; Struik, 1967), lo que entre otras cosas hace difícil evaluar la influencia que tuvo entre sus contemporáneos y provocó una polémica ente los matemáticos británicos y alemanes respecto a la invención del cálculo de la que, en gran medida, tanto Newton como Leibnitz se mantuvieron alejados. Aunque hizo muchísimas otras contribuciones científicas tanto en física como en matemáticas, la aparición en 1687 de su obra *Philosophia naturalis principia mathematica* revolucionó la física y, sin duda, lo consagró como uno de los más brillantes científicos universales de todos los tiempos. Evidentemente, en cuanto a la respuesta a la pregunta a la que se refiere este apartado, podemos afirmar que Newton fue físico y matemático, además de filósofo (dedicó muchos años al estudio de la teología), y tuvo un papel destacadísimo en el desarrollo de la ciencia moderna. Murió en 1727 con muchos honores a cuestas, pues fue electo presidente de la Royal Society en 1704 y recibió el nombramiento de Caballero, otorgado por la reina Ana, en 1705.

Newton introdujo lo que él mismo denominó "la manera matemática" de hacer física en donde las reglas eran muy claras (Strong, 1960). En los cálculos y demostraciones puramente matemáticos, introdujo postulados que no tenían que ver con principios mecánicos. Creía en la realidad de estos absolutos matemáticos, pero no señaló que su origen radicara en la observación y el experimento. Fue el éxito en las demostraciones lo que reforzó su convencimiento de la realidad de este sistema absoluto. Por otra parte, los principios mecánicos establecidos a través de mediciones razonables alcanzan en su esquema el estatus de generalizaciones inductivas o de leyes

[3] "Mortales, congratulaos de que un hombre tan grande haya vivido para honra de la raza humana".

empíricamente establecidas, así, las definiciones de masa y cantidad de movimiento son dadas operacionalmente en función de reglas de medición. Finalmente, la unión de los principios mecánicos y los postulados matemáticos lleva a las premisas de la física teórica newtoniana.

Debe señalarse (Strong, 1960) que, contrariamente a algunos de sus contemporáneos, Newton no creía que los fundamentos de las matemáticas debían buscarse en la correspondencia entre los términos matemáticos y las propiedades físicas. Dicha suposición, que partía tanto de teorías empíricas como racionalistas, se apoyaba en el éxito del empleo del razonamiento matemático para resolver problemas físicos. Pero como hemos mencionado, los absolutos matemáticos y los principios mecánicos no tienen en la concepción de Newton un origen común. Para abundar un poco más en las similitudes y las diferencias, pasemos ahora a analizar desde otra perspectiva la conexión entre física y matemáticas.

LA RELACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS CON LA FÍSICA

En una de las siete conferencias (*Messenger lectures*) que Richard Feynman, premio Nobel de física en 1965, impartió en la Universidad de Cornell, en noviembre de 1964, y cuyas transcripciones están recogidas en el libro citado (Feynman, 1965), disertó precisamente acerca del título de este apartado. Sobre esta conferencia cuya lectura recomiendo ampliamente, deseo comentar algunas ideas que en gran medida reflejan una postura que considero común en el medio de los físicos teóricos e ilustrarlas con algunas citas. Para empezar, es pertinente apuntar que para Feynman es muy claro que las matemáticas tienen una gran aplicación en la física, en cuanto se trata de entrar en un análisis detallado de los fenómenos que ocurren en situaciones complicadas y que, en muchos casos, por así decirlo, proporcionan lo que podríamos denominar "las reglas fundamentales del juego".

Es evidente que Feynman profesa un gran respeto por las matemáticas y encuentra en ellas un gran goce estético, tal y como se desprende de este pequeño extracto:

> Cada una de nuestras leyes es una afirmación puramente matemática, expresada en unas matemáticas más bien complejas y abstrusas. [...] El objetivo de esta conferencia es simplemente subrayar el hecho de que es imposible explicar honestamente la belleza de las leyes de la naturaleza de manera que la gente pueda realmente sentirla, si la gente no posee un conocimiento profundo de las matemáticas. Lo siento, pero es así (Feynman, 1965:29).

Me atrevería a afirmar que estas dos características son compartidas por la mayoría de los físicos teóricos. Lo mismo puede decirse de lo que muchos consideramos como una justa reclamación de la reciprocidad y aun de una contribución sustantiva de la física a las matemáticas. En las palabras de Feynman (y nótese que a pesar de todo no abandona un tono humilde):

> Cuando en física los problemas se vuelven complicados, a menudo acudimos a los matemáticos, quienes pueden haberlos ya estudiado y, en consecuencia, concebido una línea argumental que nosotros podamos seguir. O pueden no haberlos estudiado, en cuyo caso no nos queda más remedio que inventar nuestro propio razonamiento que luego ofrecemos a los matemáticos. [...] las matemáticas son, pues, una manera de pasar de un conjunto de proposiciones a otro. Son evidentemente útiles en física, porque tenemos tantas maneras distintas de hablar de las cosas, y las matemáticas nos permiten obtener consecuencias, analizar situaciones e ir cambiando las leyes para conectar las distintas proposiciones. En realidad, la cantidad total de cosas que sabe un físico es muy pequeña (Feynman, 1965:33-34).

En cuanto al trabajo de los físicos, Feynman le adjudica la herencia de la tradición babilónica, aunque deja entreabierta la posibilidad de que algún día se conozcan todas las leyes de la física, en cuyo caso sería factible adoptar un enfoque axiomático. Esto último ha sido una gran aspiración de físicos muy connotados que aún se mantiene vigente. La siguiente cita creo que es bastante elocuente:

> En física poseemos estos vastos principios que cubren diferentes leyes y cuya derivación no conviene tomar demasiado al pie de la letra, porque si creemos que un principio es válido solamente si lo es el precedente,

no seremos capaces de entender las interconexiones entre las diferentes ramas de la física. Algún día, cuando la física esté completa y sepamos todas sus leyes, quizá podamos partir de unos ciertos axiomas y de ahí deducir todo el resto. Pero mientras no conozcamos todas las leyes, podemos utilizar algunas de ellas para especular sobre teoremas que no podemos demostrar. Para comprender la física hay que mantener un adecuado equilibrio y tener en la cabeza todas las distintas proposiciones y sus interrelaciones, porque las leyes a menudo tienen implicaciones que van más allá de sus deducciones. Esto dejará de tener importancia solamente cuando se conozcan todas las leyes (Feynman, 1965:37-38).

Finalmente, quiero referirme a la distinción entre el quehacer físico y el trabajo matemático que Feynman hace, y que me parece muy relevante para el tema de este escrito. En algunos aspectos, las alusiones de Feynman a los matemáticos que voy a citar a continuación pueden aparecer como meras caricaturas, sobre todo si se sacan del contexto de respeto y admiración que he señalado anteriormente. Lo importante desde luego es que, independientemente de esto, se reitera la idea de una contribución sustantiva de la física a las matemáticas y de la contraposición entre abstracción y mundo real. La conclusión que se desprende es la del carácter complementario (y no subordinado) entre ambas disciplinas.

A los matemáticos sólo les concierne la estructura del razonamiento y les traen sin cuidado las cosas de las que están hablando. Ni siquiera les hace falta *saber* de qué están hablando ni, como ellos mismos afirman, si lo que dicen es cierto. [...] en otras palabras, los matemáticos preparan razonamientos abstractos para que se puedan usar si se dispone de un conjunto de axiomas sobre el mundo real. Pero para el físico todas sus frases tienen significado. Esto es algo muy importante que mucha gente que llega a la física a través de las matemáticas no alcanza a valorar en su justa medida. La física no son matemáticas y las matemáticas no son física. Se ayudan mutuamente. Pero en física hay que conocer la conexión de las palabras con el mundo real. [...] Por supuesto que los razonamientos matemáticos que se han desarrollado son de gran utilidad para los físicos. Por otra parte también, a veces los razonamientos de los físicos son de gran utilidad para los matemáticos.

A los matemáticos les gusta razonar de la manera más general posible [...] Al físico siempre le interesa el caso especial: nunca el caso general. El físico habla de una cosa concreta, nunca le interesa hablar de forma abstracta sobre cualquier cosa (Feynman, 1965:43-44).

Es interesante señalar que este sentimiento de unidad y complementariedad de ambas disciplinas, que me parece fundamental, también ha sido compartido por brillantes matemáticos del siglo XX. Veamos un par de ejemplos. En el prefacio de la primera edición inglesa del texto clásico de Courant y Hilbert (1953), se reproduce un párrafo de la primera edición alemana cuya traducción sería más o menos la siguiente:

Desde el siglo XVII, la intuición física ha servido como una fuente vital para los problemas y métodos matemáticos. Las tendencias y modas recientes han, sin embargo, debilitado la conexión entre las matemáticas y la física; los matemáticos, alejándose de las raíces intuitivas de las matemáticas se han concentrado en los refinamientos y enfatizado la parte correspondiente a los postulados, y a veces han soslayado la unidad de su ciencia con la física y otros campos. En muchos casos, los físicos han dejado de apreciar las actitudes de los matemáticos. Estas disputas representan sin duda una amenaza seria a la ciencia como un todo: el ancho caudal del desarrollo científico se puede dividir en áreas cada vez más pequeñas y eventualmente secarse. Parece por ello importante dirigir nuestros esfuerzos a reunir las tendencias divergentes a través de esclarecer las características comunes y las interconexiones de muchos y variados hechos científicos. Solamente así el estudiante puede adquirir el dominio del material y sentar las bases para el posterior desarrollo orgánico de la investigación (Courant y Hilbert, 1953:v-vi).

Con matices, la misma preocupación la manifiesta el matemático francés Dugas cuando señala:

No entra en mi propósito discutir la unicidad o la diversidad de las matemáticas actuales (comprendida la física teórica). Hechas las reservas necesarias sobre esta cuestión y sobre el carácter "totalitario" de las teorías modernas, logísticas o físicas, que pretenden reconstruir íntegramente el análisis y la mecánica a partir de sus axiomas primeros, persiste el hecho

> de que la matemática, como todas las otras ramas de la técnica actual, obliga al investigador a especializarse. Por esta especialización hay que pagar un rescate, que es la desaparición del matemático universal, a la vez geómetra, analista y físico, del que Poincaré parece haber sido uno de los últimos representantes (Dugas, 1962:39-40).

De este último comentario, quiero rescatar la necesidad del trabajo en equipo que suple las limitaciones propias de las disciplinas por separado.

A MANERA DE CONCLUSIÓN

La necesidad de especialización del quehacer científico moderno oscurece muchas veces el carácter universal de la ciencia, cuyo esplendor máximo se alcanzó quizás en el Renacimiento. Siendo ésta la realidad en la que nos desenvolvemos cotidianamente, lo que he pretendido a lo largo de este trabajo es hacer notar que sí existen diferencias entre el trabajo que realizan los físicos teóricos y los matemáticos, en particular el carácter experimental de la física en contraste con el enfoque más bien abstracto de las matemáticas. Pero que de la misma manera se trata de enfoques complementarios y que la interacción entre ambas disciplinas ha resultado y sigue resultando provechosa para ambas partes. Mi deseo y expectativa en este sentido son los de contribuir, aunque sea de forma muy modesta, a eliminar las barreras que dificulten dicha interacción.

DATOS BIOGRÁFICOS

Descartes, René (1596-1650). Filósofo y científico francés. Se le considera el padre de la filosofía moderna y de la geometría analítica.

Euclides (siglos IV-III a. C.) Matemático griego que sentó, con sus trabajos, las bases de la geometría.

Fermat, Pierre de (1601-1655). Científico francés. Destacó por sus aportaciones en teoría de números y sus contribuciones a la óptica.

Feynman, Richard Phillips (1918-1988). Físico estadunidense. Premio Nobel de física en 1965 (compartido con Julian S. Schwinger y Tomonoaga Schinichiro) por sus trabajos en electrodinámica cuántica.

Hilbert, David (1862-1943). Matemático alemán al que se deben notables aportaciones en los campos de la geometría y el cálculo integral.

Leibnitz, Gottfried Wilhelm (1646-1716). Filósofo y matemático alemán. Se le considera uno de los inventores del cálculo.

Maxwell, James Clerk (1831-1879). Físico escocés, célebre por sus grandes contribuciones a la física teórica, especialmente en los campos de la electricidad y el magnetismo.

Newton, Isaac (1642-1727). Matemático, físico y filósofo inglés quien, con la invención del cálculo diferencial y la introducción de las leyes de la mecánica y de la gravitación universal, marcó el nacimiento de la ciencia moderna.

Poincaré, Jules Henri (1854-1912). Matemático francés. Hizo contribuciones sustanciales en el análisis matemático y las ecuaciones diferenciales no lineales, además de la mecánica celeste.

Reichenbach, Hans (1891-1953). Filósofo y físico alemán. Fue uno de los fundadores del círculo de Berlín, grupo de pensadores que investigó la filosofía de la ciencia y la estructura metodológica del conocimiento científico.

BIBLIOGRAFÍA

Boyer, C. B., 1995, "Analytic geometry: The discovery of Fermat and Descartes", en Swetz, Frank J. (ed.), *From five fingers to infinity. A journey through the History of Mathematics.* Chicago, Open Court Pub. Co.

Brunet, P., 1971, "Ojeadas sobre el pensamiento matemático de Newton", en Lara Aparicio, M. (comp.), *Antología de Matemáticas*, México, UNAM (*Lecturas Universitarias*, 7).

Courant, R. y D. Hilbert, 1953, *Methods of mathematical physics*, 1a. ed., Nueva York, Interscience Publishers.

________ y H. Robbins, 1971, "Qué es la matemática", en Lara Aparicio, M. (comp.), *Antología de matemáticas*, México, UNAM (*Lecturas Universitarias*, 7).

Devlin, K. J., 1994, *Mathematics, the science of patterns: The search for order in life, mind and the Universe*, Nueva York, Scientific American Library. [Distribuido por W. H. Freeman and Co.]

Dugas, R., [1962], 1971, "La matemática, objeto de cultura y herramienta de trabajo". en Lara Aparicio, M. (comp.), *Antología de matemáticas*, México, UNAM, (Lecturas Universitarias, 7).

Feynman, R. P., [1965], 1986, *El carácter de la ley física*, trad. de Antoni Bosch, Biblioteca de Divulgación Científica Muy Interesante, 64. "Segunda conferencia: La relación de las matemáticas con la física", Barcelona, Ediciones Orbis.

Joos, G., 1964, *Theoretical Physics*, 3ra. ed., Londres, Blackie and Son.

Reichenbach, H., 1945, *Objetivos y métodos del conocimiento físico*, trad. Eugenio Imaz, México, Fondo de Cultura Económica (Colección de Textos Clásicos para la Historia de la Ciencia, 1).

Strong, E. W., 1960, Newton's "Mathematical Way", en Wiener, Philip P. y Aaron Noland (eds.), *Roots of scientific thought. A cultural perspective*, Nueva York, Basic Books Publishers.

Struik, D. J., 1967, *A concise History of Mathematics*, Nueva York, Dover.