Ejercicios de Métodos de la Física Matemática
Curso: **2009/10**
Alumnas: **Isabel María Alfonso Naranjo**
Clara Eugenia Martínez Vázquez

Métodos de la física matemática

HOJA 4

Ejercicio nº 16:

Sea el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu x + y - x(x^2+y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= -x + \mu y - y(x^2+y^2) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Halla la solución en polares y muestra el aspecto del espacio de fases para:

(a) μ<0
(b) μ=0
(c) μ>0

Observa el cambio cualitativo que se producen en las trayectorias al pasar μ de valores negativos a valores positivos. Este fenómeno se conoce como bifurcación de Hopf supercrítica.

Solución:

Lo primero que nos pide el problema es hallar la solución en polares. Para ello tenemos que tener en cuenta que en coordenadas polares:

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} \qquad (2)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(x\frac{dx}{dt} - y\frac{dy}{dt}\right) \qquad (3)$$

Estas expresiones están demostradas en la página 310 del libro *Métodos matemáticos avanzados para científicos e ingenieros*, Santos Bravo Yuste (Servicio de Publicaciones de la Uex, Cáceres, 2006)

Multiplicando la primera ecuación de (1) por “x”, la segunda por “y” y sumando las expresiones resultantes, la ecuación (2) se transforma en:

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = x[\mu x + y - x(x^2 + y^2)] + y[-x + \mu y - y(x^2 + y^2)]$$
$$= \mu x^2 + xy - x^2(x^2 + y^2) - xy + \mu y^2 - y^2(x^2 + y^2)$$
$$= \mu(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)(x^2 + y^2)$$

Como sabemos que en coordenadas polares: $\boldsymbol{r^2 = x^2 + y^2}$. Por lo tanto la expresión anterior queda reducida a lo siguiente:

$$r\frac{dr}{dt} = \mu r^2 - r^4 = r^2(\mu - r^2)$$

Con lo que finalmente obtenemos lo siguiente:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{r^2}) = \boldsymbol{r\mu} - \boldsymbol{r^3}} \qquad \textbf{(4)}$$

A continuación, multiplicamos la segunda ecuación de (1) por “x”, la primera por “y” y restando ambas expresiones, la ecuación (3) se reduce a:

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = x\frac{dx}{dt} - y\frac{dy}{dt} = x[-x + \mu y - y(x^2 + y^2)] - y[\mu x + y - x(x^2 + y^2)]$$
$$= -x^2 + \mu xy - xy(x^2 + y^2) - \mu xy - y^2 + xy(x^2 + y^2) = -(x^2 + y^2)$$
$$= -r^2$$

Así pues, tenemos que:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\vartheta}} = -\mathbf{1}} \qquad \textbf{(5)}$$

Por lo tanto las ecuaciones (4) y (5) forman un sistema de ecuaciones, que es el mismo que el sistema (1), pero, en este caso, expresado en coordenadas polares:

$$\left.\begin{array}{c} \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{r^2}) = \boldsymbol{r\mu} - \boldsymbol{r^3} \\[2ex] \dot{\boldsymbol{\vartheta}} = -\mathbf{1} \end{array}\right\}$$

Resolvemos la ecuación diferencial (5), de esta forma tenemos que:

$$\vartheta = -t + c$$

Seguidamente intentamos hallar la solución de (4). Para ello, tendremos que hacer las siguientes distinciones:

(a) Para μ>0:

La ecuación (4), en este caso, es:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{r}^2)$$

Intentamos resolverla, considerando que μ es un número positivo tendremos:

$$\int \frac{dr}{r(\mu - r^2)} = \int dt \qquad (6)$$

Para resolver la primera integral, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{x}$$

Derivando:

$$2rdr = dx$$

Si dividimos ambos miembros de la igualdad por r^2 (o lo que es lo mismo, por x) y reordenamos la expresión anterior, tendremos:

$$\frac{dr}{r} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x}$$

Introduciendo estos cambios en la primera integral de (6), tratamos de resolverla:

$$\int \frac{dx}{2x(\mu - x)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x(\mu - x)} = \frac{1}{2}\int dx \left[\frac{1/\mu}{x} + \frac{1/\mu}{(\mu - x)}\right] = \frac{1}{2}\int dx \left[\frac{1/\mu}{x} - \frac{1/\mu}{(x - \mu)}\right]$$
$$= \frac{1}{2\mu}[ln\, x - ln\,|x - \mu|] = \frac{1}{2\mu}\, ln \frac{x}{|x - \mu|}$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{dr}{r(\mu - r^2)} = \frac{1}{2\mu}\, ln \frac{r^2}{|r^2 - \mu|}$$

NOTA: *Hay que tener en cuenta que los logaritmos solo se definen para números positivos. De esta manera, el denominador del logaritmo siempre tiene que ser positivo y viene definido por:*

$$|r^2-\mu| = \begin{cases} r^2-\mu & si\ r > \sqrt{\mu} \\ \mu - r^2 & si\ \ r < \sqrt{\mu} \end{cases}$$

A continuación resolvemos la segunda integral de (6):

$$\int dt = t + c$$

Por lo tanto:

- **Si $\mathbf{r > \sqrt{\mu}}$**, tendremos la siguiente solución:

$$\frac{1}{2\mu}\, ln \frac{r^2}{r^2-\mu} = t + c$$

Despejando y operando, llegamos al siguiente resultado:

$$\boxed{\boldsymbol{r = \frac{\sqrt{\mu}}{\left(1 - a\, e^{-2\mu t}\right)^{1/2}}}} \qquad (7)$$

- **Si $\mathbf{r < \sqrt{\mu}}$**, tendremos la siguiente solución:

$$\frac{1}{2\mu}\, ln \frac{r^2}{\mu - r^2} = t + c$$

Operando, llegamos al siguiente resultado:

$$\boxed{\boldsymbol{r = \frac{\sqrt{\mu}}{\left(1 + a\, e^{-2\mu t}\right)^{1/2}}}} \qquad (8)$$

Donde "a" es una constante de integración arbitraria (distinta en cada caso) cuyo valor se determina a partir de las condiciones iniciales.

Si consideramos que $\boldsymbol{r(0) = r_0}$, la constante "a" de la ecuación (7) toma el siguiente valor:

$$\boldsymbol{a = \frac{r_0^2 - \mu}{r_0^2}}$$

Del mismo modo la constante "a" de la ecuación (8) será:

$$\boldsymbol{a = \frac{\mu - r_0^2}{r_0^2}}$$

Conclusiones:

Si analizamos (7) y (8) cuando t $\longrightarrow \infty$, obtenemos en ambas expresiones que:

$$r \longrightarrow \sqrt{\mu}$$

Es decir, para **μ>0** tenemos que $\mathbf{r} = \sqrt{\boldsymbol{\mu}}$ es un CICLO LÍMITE ESTABLE, al cual se acercan las trayectorias que presentan un radio mayor y menor que $\sqrt{\boldsymbol{\mu}}$. Por lo tanto, en este caso el origen es un foco inestable.

Otra cuestión importante en este caso es averiguar cuál es el sentido de giro de las trayectorias. Esto podemos averiguarlo de dos formas:

1. Tal y como nos indica la ecuación $\vartheta = -t + c$, el sentido de giro de las trayectorias en espiral y del ciclo límite es en el sentido de las agujas del reloj.
2. Otra forma es examinando en qué dirección los brazos de la espiral (o el centro) cortan al eje de ordenadas(x=0):

   Si hacemos x=0 en la primera ecuación de (1), tenemos que:

   $$\dot{x}(0) = y_0 \ , y_0 > 0,$$

   Entonces: $\dot{x}(0) > 0$, por tanto el sentido de giro de giro del ciclo límite y las espirales que se acercan a él es horario.

Vemos cómo por ambos caminos llegamos a una misma conclusión.

(b) Para μ=0:

La ecuación (4), en este caso, es:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{r}^3$$

Para hallar la solución en este caso deberemos resolver la siguiente integral:

$$\int \frac{dr}{-r^3} = \int dt \qquad (9)$$

De esta manera:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{r^2} = t + c$$

Despejando r:

$$\boxed{\boldsymbol{r = \frac{1}{\sqrt{2t+c}}}} \qquad (10)$$

Donde "c" es una constante de integración arbitraria que se determina a través de las condiciones iniciales.

Si tenemos en cuenta que $\boldsymbol{r(0) = r_0}$, la constante "c" de la ecuación (10) toma el siguiente valor:

$$\boldsymbol{c = \frac{1}{r_0^2}}$$

Conclusiones:

Si analizamos (10) cuando t $\longrightarrow$ ∞, obtenemos que:

$$r \longrightarrow 0$$

En este caso, a medida que el tiempo aumenta las trayectorias tienden a acercarse al origen, por tanto, éste es un foco estable.

(c) Para μ<0:

La ecuación (4), en este caso, es:

$$\boldsymbol{\dot{r} = r(\mu - r^2) = r(-|\mu| - r^2) = -r(|\mu| + r^2) = -r(\alpha + r^2)}$$

Donde $\alpha = |\mu|$, es decir, α es un número positivo.

De esta manera, para hallar la solución en este caso, resolvemos la siguiente integral:

$$\int \frac{dr}{-r(\alpha + r^2)} = \int dt$$

O lo que es lo mismo:

$$\int \frac{dr}{r(\alpha + r^2)} = -\int dt \qquad (11)$$

De forma análoga a como resolvimos la integral en el caso (a), es decir, haciendo el mismo cambio de variable y operando de forma similar, resolvemos esta primera integral. Así tendremos que:

$$\int \frac{dx}{2x(\alpha+x)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x(\alpha+x)} = \frac{1}{2}\int dx\left[\frac{1/\alpha}{x} - \frac{1/\alpha}{(\alpha+x)}\right] = \frac{1}{2\alpha}[\ln x - \ln(\alpha+x)]$$
$$= \frac{1}{2\alpha}\ln\frac{x}{(\alpha+x)}$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{dr}{r(\alpha+r^2)} = \frac{1}{2\alpha}\ln\frac{r^2}{(\alpha+r^2)}$$

NOTA: *En este caso no tenemos problemas con los logaritmos, pues α es una cantidad siempre positiva.*

A continuación resolvemos la segunda integral de (11):

$$\int dt = -t + c$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2\alpha}\ln\frac{r^2}{(\alpha+r^2)} = -t + c$$

Despejando y operando, llegamos al siguiente resultado:

$$\boxed{\boldsymbol{r} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}}{(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{e}^{2\alpha t} - \mathbf{1})^{1/2}}} \qquad (12)$$

Donde "a" es una constante de integración arbitraria cuyo valor se determina a partir de las condiciones iniciales.

Considerando que $\boldsymbol{r}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{r}_{\mathbf{0}}$, la constante "a" de la ecuación (12) será:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{r}_0^2 + \boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{r}_0^2}$$

Conclusiones:

Si analizamos (12) cuando $t \longrightarrow \infty$, obtenemos, al igual que antes, que:

$$r \longrightarrow 0$$

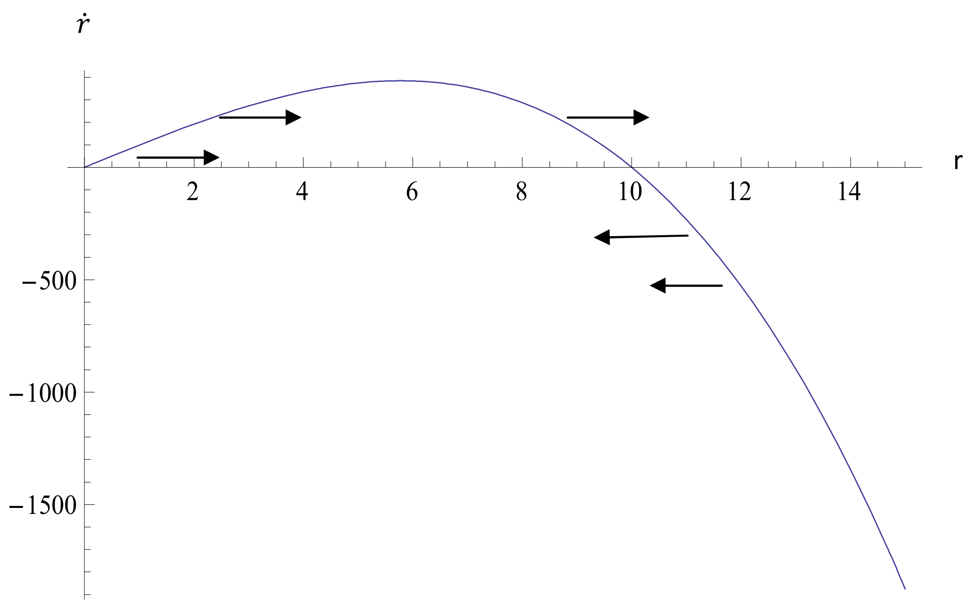
De nuevo, a medida que el tiempo aumenta las trayectorias tienden a acercarse al origen, por tanto, el origen, en este caso, también es un foco estable.

El ejercicio también nos pide que mostremos el aspecto del espacio de fases para los distintos valores de µ y que observemos el cambio cualitativo que se producen en las trayectorias al pasar µ de valores negativos a valores positivos.

Aunque, ya hemos definido, a través de las soluciones en polares (7), (8), (10) y (12) el aspecto del espacio de fases, lo que haremos ahora es partir de la ecuación (4) y a través de los distintos valores de µ pintar el aspecto del espacio de fases en cada caso.

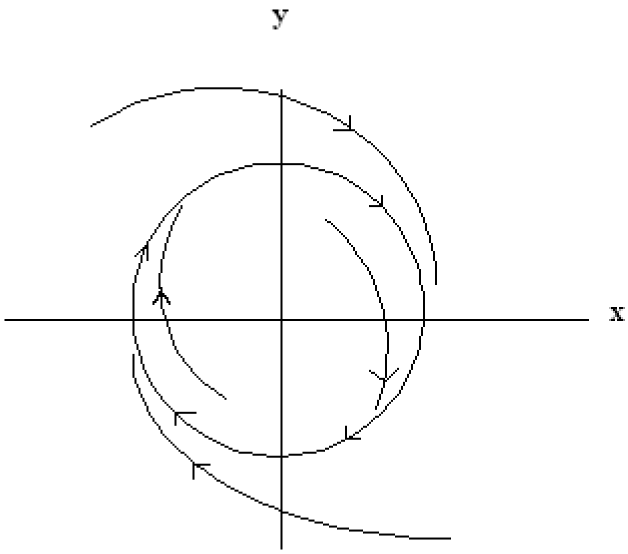
De forma gráfica la ecuación (4) para varios valores particulares de µ es:

- **Si µ=100>0**

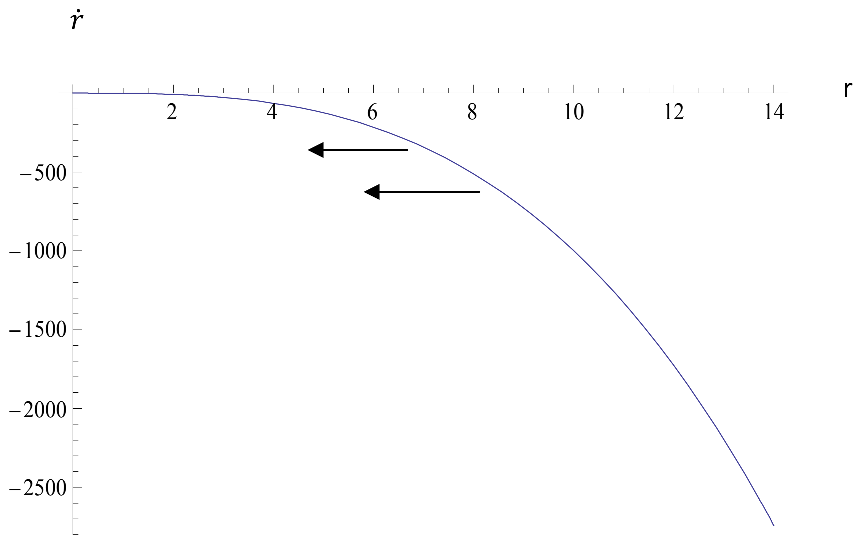


Gracias a esta gráfica podemos observar que para nos encontramos un ciclo límite estable en $\mathbf{r} = \sqrt{\boldsymbol{\mu}}$. También podemos observar cómo las trayectorias se alejan del origen, es decir, cómo el origen es un foco inestable.

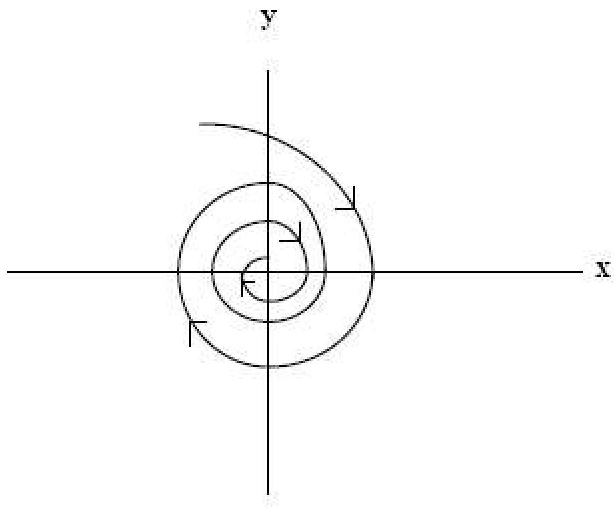
Tal y como analizamos anteriormente las trayectorias se recorren en sentido horario, por lo tanto, el espacio de fases, para **$\mu>0$**, quedará de la siguiente forma:



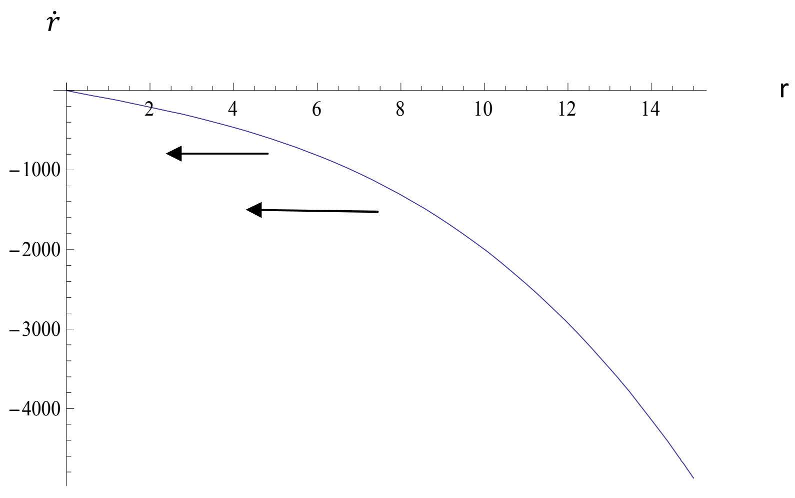
- **Si $\mu=0$**



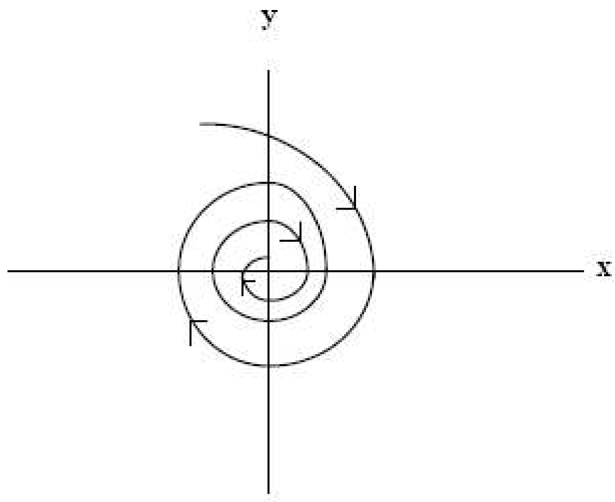
Dada esta situación, el ciclo límite desaparece y el origen pasa a ser un foco estable, al cual se dirigen las trayectorias. El aspecto del espacio de fases cuando **$\mu=0$** es:



- **Si μ=-100<0**



Dada esta gráfica, similar a la del caso anterior, podemos concluir que el aspecto del espacio de fases será similar, en lo único que se diferencia del caso μ=0, es que para μ<0 la pendiente es mayor y por tanto más rápidamente se acercará al origen. Así, el aspecto del espacio de fases es:



De esta manera, llegamos a los mismos resultados cualitativos que establecimos en la primera parte del ejercicio.

Podemos concluir, finamente, que se observa un cambio cualitativo al pasar μ de valores negativos a positivos. Pues, para $\mu>0$, tenemos que el origen es un foco inestable y en $\mathbf{r} = \sqrt{\boldsymbol{\mu}}$ nos encontramos un ciclo límite estable; mientras que cuando $\mu<0$, el ciclo límite desaparece y ahora el origen pasa a ser un foco estable. Es decir, al pasar los valores de μ de positivos a negativos, o viceversa, cambia de forma radical el comportamiento de las trayectorias. Es decir cambia el comportamiento del sistema.

Se denomina **bifurcación** al cambio del número de atractores de un sistema dinámico no lineal cuando un parámetro del sistema cambia (en nuestro caso ese parámetro es μ). La bifurcación se acompaña de un cambio de las estabilidad de un atractor (en nuestro caso pasamos de tener un foco estable a tener un foco inestable)

En este tipo de bifurcación, el parámetro μ, determina la estabilidad de un punto fijado en el origen.

El fenómeno estudiado en este ejercicio se conoce como **bifurcación de Hopf supercrítica.**