# HOJA 4. PROBLEMA 17

**Sea el sistema**

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \mu x - y + x(x^2+y^2),\\ \frac{dy}{dt} &= x + \mu y + y(x^2+y^2).\end{aligned}}$$

**Halla la solución en polares y muestra el aspecto de fases para (a) μ<0, (b) μ=0, y (c) μ>0. Observa el cambio cualitativo que se producen en las trayectorias al pasar de μ de valores negativos a valores positivos. Este fenómeno se conoce como bifurcación de Hopf subcrítica [más detalles en , por ejemplo, sección 8.2 “Nonlinear Dynamics and Chaos”, S. H. Strogaz, (Addison-Wesley, 1994).**

Lo primero que haremos, ya que nos lo pide el enunciado, será pasar nuestras ecuaciones a polares.

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad\qquad r\frac{dr}{dt} = x\dot{x} + y\dot{y}$$

$$\theta = arctg\left(y/x\right) \qquad\qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = x\dot{y} - y\dot{x}$$

Teniendo en cuenta esto, hallamos el valor de la derivada de r.

$$r\frac{dr}{dt} = x\left[\mu x - y + x(x^2+y^2)\right] + y\left[x + \mu y + y(x^2+y^2)\right]$$

$$r\frac{dr}{dt} = \mu x^2 - xy + x^2r^2 + yx + \mu y^2 + y^2r^2$$

$$r\frac{dr}{dt} = \mu(x^2+y^2) + r^2(x^2+y^2)$$

$$r\frac{dr}{dt} = \mu r^2 - r^4$$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = \mu r + r^3} \qquad (1)$$

Del mismo modo calculamos el valor de θ.

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = x\dot{y} - y\dot{x}$$

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = x\left[x + \mu y + y(x^2 + y^2)\right] - y\left[\mu x - y + x(x^2 + y^2)\right]$$

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = x^2 + \mu xy + xyr^2 - \mu yx + y^2 - xyr^2 = x^2 + y^2 = r^2$$

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = r^2$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = 1} \qquad (2)$$

Por tanto, el sistema equivalente será:

$$\begin{array}{l} \dot{r} = \mu r + r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{array} \quad => \quad \begin{array}{l} \dot{r} = r(\mu + r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{array} \qquad (3)$$

Distinguimos dos casos:

**A) μ≠0**

Podemos resolver el sistema:

$$\begin{array}{l} \dot{r} = r(\mu + r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{array} \Rightarrow \int \frac{dr}{\mu r + r^3} = \int dt \Rightarrow c + t = \begin{cases} r^2 = x \\ 2rdr = dx \Rightarrow \\ \dfrac{dr}{r} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{x} \end{cases}$$

Calculamos el valor de ambas integrales. Por un lado obtenemos

$$\boxed{\theta(t) = t + c}$$

Hallamos el valor de la constante "c" cuando θ(t=0).

$$\boxed{c = \theta_0}$$

Obteniendo de este modo, si sustituimos la constante.

$$\boxed{\theta = t + \theta_0} \qquad (4)$$

Resolvemos ahora la otra integral.

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x(\mu+x)}$$

$$\frac{1}{x(\mu+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(\mu+x)}$$

$$A\mu + Ax + Bx = 1 \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{\mu} \\ A = -B \end{cases}$$

Aplicamos este cambio y sustituimos los valores de A y B

$$\frac{1}{2\mu}\int \left[\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{\mu+x}\right)\right] dx = \int dt$$

$$\frac{1}{2\mu}\int dx\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mu+x}\right) = \frac{1}{2\mu}\left[\ln x - \ln\left(|\,\mu+x\,|\right)\right]$$

Teniendo esto en cuenta

$$\ln x - \ln(|\,\mu+x\,|) = 2\mu t + K$$

Si deshacemos el cambio de variable.

$$\ln\left(\frac{r^2}{|\,\mu+r^2\,|}\right) = 2\mu t + K$$

Finalmente obtenemos:

$$\boxed{Ke^{2\mu t} = \frac{r^2}{|\,\mu+r^2\,|}} \qquad (5)$$

Calculamos el valor de la constante “K” para r(t=0).

$$\boxed{K = \frac{r_0^2}{|\,\mu+r_0^2\,|}} \qquad (6)$$

Analizamos ahora $|\mu+r^2|$ cuando:

**1) $\mu+r^2<0$**

En este caso

$$|\mu+r^2|=-(\mu+r^2) \qquad (7)$$

Por tanto,

$$Ke^{2\mu t}=\frac{r^2}{-(\mu+r^2)} \qquad (8)$$

Despejando $r^2$

$$\boxed{r^2=\frac{\mu}{\left(\frac{\mu+r_0^2}{r_0^2}\right)e^{-2\mu t}-1}} \qquad (9)$$

En nuestro caso: $\mu<0$, cuando $t\rightarrow\infty$ vemos que $r^2\rightarrow 0$

**2) $\mu+r^2>0$**

En este caso

$$|\mu+r^2|=\mu+r^2 \qquad (10)$$

Por tanto,

$$Ke^{2\mu t}=\frac{r^2}{\mu+r^2} \qquad (11)$$

Despejando $r^2$

$$\boxed{r^2=\frac{\mu}{\left(\frac{\mu+r_0^2}{r_0^2}\right)e^{-2\mu t}-1}} \qquad (12)$$

Calculamos el valor para el cual el denominador se hace cero. De este modo obtenemos tc.

$$t_c=-\frac{1}{2\mu}\ln\left(\frac{r_0^2}{\mu+r_0^2}\right) \qquad (13)$$

Es decir, para $t\rightarrow t_c$, tenemos que, $r^2\rightarrow\infty$

**B) Caso μ=0**

Sustituyendo en la ecuación (1) llegamos a que

$$\dot{r} = r^3 \qquad (14)$$

$$\frac{r^{-2}}{-2} = t + K \Rightarrow r^2 = \frac{1}{K-2t} \qquad (15)$$

$$r_0^2 = \frac{1}{K} \qquad (16)$$

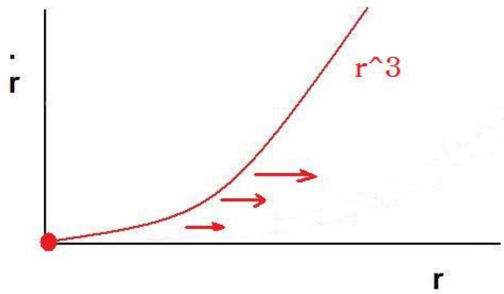
$$r^2 = \frac{r_0^2}{1-2r_0^2 t} \qquad (17)$$

Para un valor finito de t ($t=1/2r_0^2$) podemos observar que r llega al infinito.

Estos resultados están de acuerdo con el análisis cualitativo siguiente:

**a) Cuando μ=0**

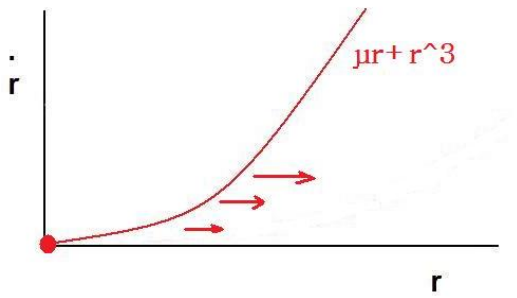
Representamos gráficamente la ecuación que obtuvimos al principio del ejercicio. Quedando de la siguiente forma.




Este sistema tiende a infinito, y su comportamiento es estable, como podemos comprobar con las flechas, exceptuando en el punto, el cual es inestable.

**b) Cuando μ>0.**

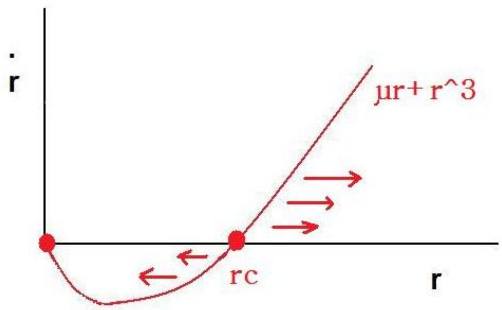
Si representamos esto gráficamente obtenemos:




Al igual que en el caso anterior, el sistema tiende muy rápidamente a infinito. Es estable, exceptuando en el punto, porque no tiene a infinito como el resto de la función, si no que se hace cero.

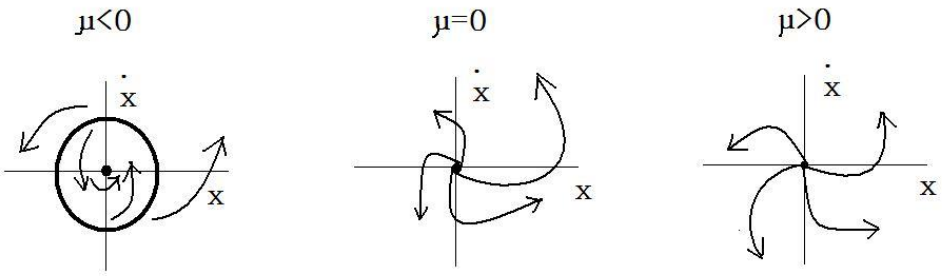
**c) Cuando μ<0.**

Representado gráficamente:




En el origen (r=0) sería estable, y el punto rc inestable. En el primer caso vemos que cada vez va tendiendo a cero hasta que llega un momento que se hace cero. En el caso de rc vemos que se separan las direcciónes, si damos valores un poco mayores el sistema tiende a infinito, mientras que si le damos valores un poco más pequeños tiende a números negativos.

Una vez comentado cada uno de los casos y analizados cualitativamente. Contrastamos lo que hemos dicho con el siguiente esquema.


μ<0
ẋ
x
μ=0
ẋ
x
μ>0
ẋ
x