MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

18) Encuentra las soluciones aproximadas mediante el método de balance armónico de la ecuación:

$$\ddot{x} + x^3 + \dot{x}^2 x = 0$$

y compara con la solución exacta $\dot{x}(x)$ en el plano de fases $\dot{x} - x$.

Solución:

El método de balance armónico nos proporciona soluciones aproximadas del tipo $x(t) = A\cos\varpi t + c$ del problema. Nuestra tarea consiste en estimar valores óptimos de c, A y ω que hagan que la solución periódica aproximada propuesta sea una buena representación de la solución periódica exacta desconocida. Proponiendo este tipo de soluciones entonces:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -wA\sin\varpi t$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -w^2 A\cos\varpi t$$

Y así podemos expresar la función $f(x,\dot{x})$ como un desarrollo en serie de Fourier:

$$f(x,\dot{x}) = f(c + A\cos\varpi t, -wA\sin\varpi t) = k(c,A,\varpi) + g(c,A,\varpi)\cos\varpi t + h(c,A,\varpi)\sin\varpi t + a.o.s.$$

donde a.o.s. son armónicos de orden superior (que podremos despreciar). Las funciones k, g y h se definen como:

$$k(c,A,\varpi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi + C, -wAsin\psi)d\psi$$
$$g(c,A,\varpi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi + C, -wAsin\psi)\cos\psi d\psi$$
$$h(c,A,\varpi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi + C, -wAsin\psi)\sin\psi d\psi$$

Para que los primeros armónicos sean nulos tiene que darse que estas funciones sean nulas con lo que se obtiene un sistema de ecuaciones del que determinaremos los parámetros del problema.

A priori podríamos proponer una solución del tipo $x(t) = A\cos\varpi t$, ya que si hacemos el cambio de x por –x la función es invariante:

$$\ddot{x} = -x^3 - \dot{x}^2 x = -f(x,\dot{x})$$

$$f(x,\dot{x}) = x^3 + \dot{x}^2 x \Rightarrow f(-x,-\dot{x}) = (-x)^3 + (-\dot{x})^2(-x) = -x^3 - \dot{x}^2 x = -f(x,\dot{x})$$

$$\Rightarrow f(-x,-\dot{x}) = -f(x,\dot{x})$$

Pero tomaremos el valor de c como incógnita, pues el propio método nos dirá que es nulo.

Partimos de la solución del tipo:

$$\begin{aligned}
&x(t) = A\cos\varpi t + C \\
&\dot{x} = -wAsin\varpi t \\
&\ddot{x} = -w^2 A\cos\varpi t \\
&\dot{x}^2 = w^2 A^2 sin^2\varpi t \\
&x^3 = A^3\cos^3\varpi t + 2CA^2\cos^2\varpi t + 2C^2 A\cos\varpi t + C^3
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación nos queda:

$$-w^2 A\cos\varpi t + A^3\underline{\cos^3\varpi t} + 3CA^2\underline{\cos^2\varpi t} + 3C^2 A\cos\varpi t + C^3 +$$

$$+w^2 A^3\underline{sin^2\varpi t\cos\varpi t} + w^2 A^2 C\underline{sin^2\varpi t} = 0$$

Los términos subrayados en rojo los tendremos que desarrollar en series de Fourier ya que no están en la forma de Fourier. Directamente podemos decir que:

$$\begin{aligned}
&\cos^3\varpi t = \frac{3}{4}\cos\varpi t + \cos 3\varpi t + a.o.s. \\
&\cos^2\varpi t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varpi t + a.o.s. \\
&\sin^2\varpi t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varpi t + a.o.s.
\end{aligned}$$

Tenemos que desarrollar en series de Fourier el término $sin^2\varpi t\cos\varpi t$:

$$sin^2\varpi t\cos\varpi t=\widehat{k}+\widehat{g}\cos\varpi t+\widehat{h}\sin\varpi t$$

Las funciones nos quedan como:

$$\widehat{k}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}sin^2\psi\cos\psi d\psi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\psi)\cos\psi d\psi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\psi d\psi-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^3\psi d\psi=0-0=0$$

$$\widehat{g}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}sin^2\psi\cos\psi\cos\psi d\psi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\psi\cos^2\psi d\psi=$$

$$=2\langle\sin^2\psi\cos^2\psi\rangle=2\langle(1-\cos^2\psi)\cos^2\psi\rangle=2(\langle\cos^2\psi\rangle-\langle\cos^4\psi\rangle)=\frac{1}{4}$$

$$\widehat{h}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}sin^2\psi\cos\psi\sin\psi d\psi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\psi\cos\psi d\psi=2\langle\sin^3\psi\cos\psi\rangle=0$$

Por lo tanto:

$$sin^2\varpi t\cos\varpi t=\widehat{k}+\widehat{g}\cos\varpi t+\widehat{h}\sin\varpi t=\frac{1}{4}\cos\varpi t$$

Si sustituimos todos estos datos en la ecuación general y agrupamos en términos de Fourier tenemos (despreciando términos de orden superior):

$$\frac{3A^2C}{2}+C^3+\frac{w^2A^2C}{2}+(\frac{3}{4}A^3+3AC^2+\frac{w^2A^3}{4}-w^2A)\cos\varpi t$$

Igualando ambos términos a cero obtendremos el sistema de ecuaciones que determinaran el resultado de nuestra ecuación:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3A^2C}{2}+C^3+\dfrac{w^2A^2C}{2}=0\\[2ex]\dfrac{3}{4}A^3+3AC^2+\dfrac{w^2A^3}{4}-w^2A=0\end{array}\right.\qquad\Rightarrow$$

$$C\left(\frac{3A^2}{2}+C^2+\frac{w^2A^2}{2}\right)=0$$

$$\frac{3}{4}A^3+3AC^2+\frac{w^2A^3}{4}-w^2A=0$$

De aquí obtenemos por un lado que C=0 como predecíamos al principio. Pero por otro lado también nos queda la posibilidad de que lo hay dentro del paréntesis sea nulo. Veamos qué ocurre en esta situación:

$$\frac{3A^2}{2}+C^2+\frac{w^2A^2}{2}=0\Rightarrow\frac{w^2A^2}{2}=-C^2-\frac{3A^2}{2}\Rightarrow$$

$$w^2A^2=-2C^2-3A^2\Rightarrow w^2=-2\frac{C^2}{A^2}-3$$

$$w^2=-(3+2\frac{C^2}{A^2})\Rightarrow\frac{C^2}{A^2}\geq 0\Rightarrow(3+2\frac{C^2}{A^2})\geq 0\Rightarrow w^2\leq 0$$

Para que esto se cumpla, ω debería ser imaginario. Como esto no puede ser, esta solución no nos vale y nos quedamos con C=0

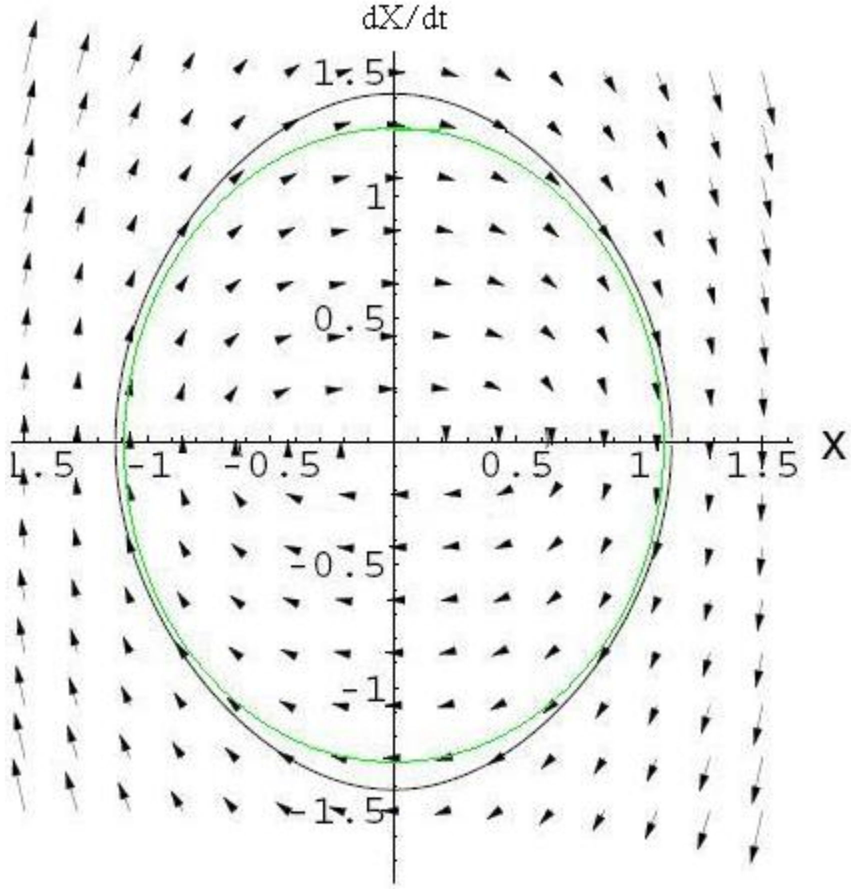
Nos queda una ecuación para determinar A y ω:

$$\frac{3}{4}A^3+\frac{w^2A^3}{4}-w^2A=0\Rightarrow w^2=\frac{3A^2}{4-A^2}$$

La solución aproximada por el método de balances armónicos de nuestro problema es:

$$\boxed{x(t)=A\cos\sqrt{\frac{3A^2}{4-A^2}}t}$$

En el ejemplo 5.12 del libro de Métodos matemáticos avanzados para científicos e ingenieros, aparece la solución exacta de este problema, que vamos a comprar gráficamente con la solución aproximada que hemos obtenido, tomando en nuestro caso el valor de la amplitud A como A=1.1:



La línea verde representa la solución por el método de balances armónicos, y la línea negra la exacta. Como vemos, la solución periódica que se obtiene mediante el método de balance armónico se asemeja en gran medida a la solución exacta de nuestro problema.

ALMUDENA SÁNCHEZ RODRÍGUEZ
JESÚS CINTAS LEAL