Amalia
Fernando
Ángel

Problema 4 – HOJA 4

Dibujar el diagrama de fases alrededor del origen de un sistema lineal de dos ecuaciones de primer orden en el que una de sus raíces es nula. Analiza la estabilidad del punto fijo (0,0).

Queremos resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y \end{cases}$$

La solución de este sistema es de la forma:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = C_1 B_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 B_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

(Donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica del sistema)
En el problema se nos indica que una de las raíces es nula, tomaremos por ejemplo $\lambda_1 = 0$, luego:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 A_1 + C_2 A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = C_1 B_1 + C_2 B_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

C_1 y C_2 dependen de las condiciones iniciales.

- Si $C_2 \neq 0$:

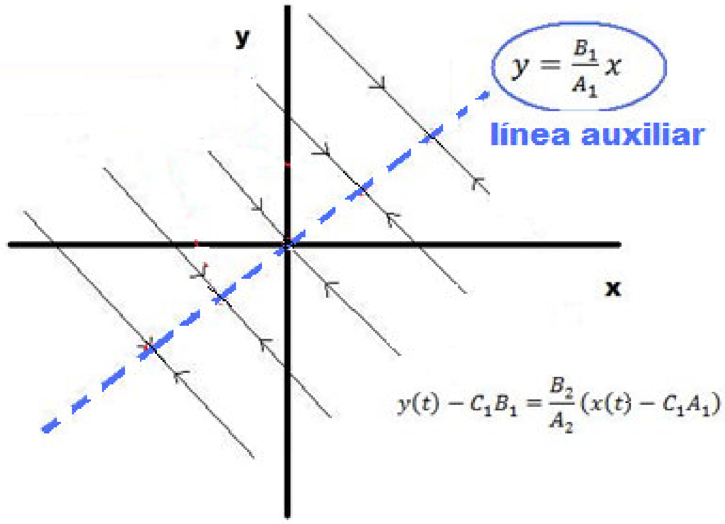
$$\begin{cases} x(t) = C_1 A_1 + C_2 A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = C_1 B_1 + C_2 B_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \Rightarrow \frac{x(t) - C_1 A_1}{y(t) - C_1 B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow y(t) - C_1 B_1 = \frac{B_2}{A_2}(x(t) - C_1 A_1)$$

Que es la ecuación de una recta de pendiente $\frac{B_2}{A_2}$ que pasa por los puntos $(C_1 A_1, C_1 B_1)$. Tendremos un conjunto de rectas porque C_1 es arbitrario, (por lo tanto, recorre todo el plano).
No conocemos la dirección de estas trayectorias, dependen del signo de λ_2:

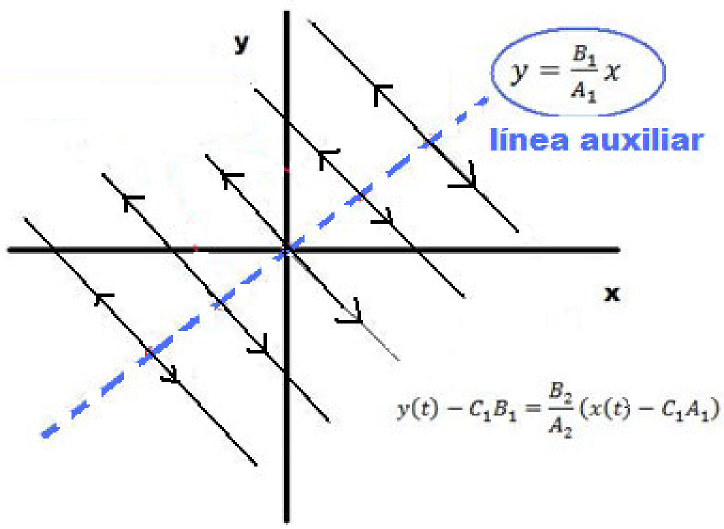
- Si $\lambda_2 < 0$:

$$\begin{cases} x(t) \underset{t\to\infty}{\rightarrow} C_1 A_1 \\ y(t) \underset{t\to\infty}{\rightarrow} C_1 B_1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{C_1 B_1 + C_2 B_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 A_1 + C_2 A_2 e^{\lambda_2 t}} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{y}{x} = \frac{B_1}{A_1}$$

Por lo tanto las trayectorias tienden al punto $(C_1 A_1, C_1 B_1)$, es decir, a la recta: $y = \frac{B_1}{A_1} x$.
Así pues, se tiene que ***el punto (0,0) es un punto estable, pero no asintóticamente estable***, al no tender al origen de manera uniforme.



- Si $\lambda_2 > 0$:
  Entonces las trayectorias se alejan de la recta $y = \frac{B_1}{A_1}x$, (línea auxiliar), por lo tanto, tendremos un caso inestable, ***el punto (0,0) es inestable***.



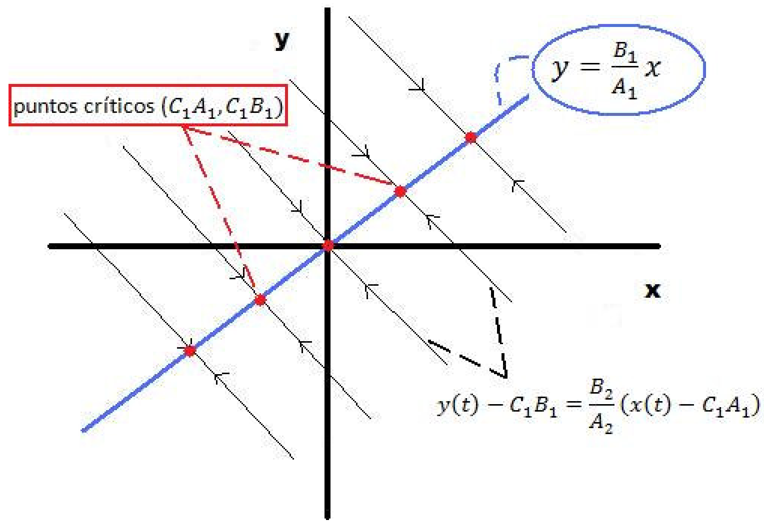
- Si $C_2 = 0$:

$$\begin{cases} x(t) = C_1A_1 \\ y(t) = C_1B_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{C_1B_1}{C_1A_1} \Rightarrow y(t) = \frac{B_1}{A_1}x(t)$$

que es la ecuación de una recta que pasa por el origen y tiene de pendiente $\frac{B_1}{A_1}$
Ya que ni *x* ni *y* dependen ahora del tiempo, la recta $y = \frac{B_1}{A_1}x$ es una recta de puntos de reposo que pasa por el origen (0,0), hacia la cual tienden las trayectorias paralelas. Por lo tanto, el punto (0,0) no es un punto de reposo aislado. Ahora la línea auxiliar también es trayectoria, es solución para $C_2 = 0$.
Como se cumple que:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \end{cases}$$

todos los puntos de la recta son puntos críticos, (puntos fijos, en reposo), por lo tanto tendremos una *línea crítica* (a la que convergen o divergen las trayectorias)



El punto (0,0) es estable, pero no asintóticamente estable.