Sara Benítez Berrocal

Sara Gutiérrez López

Ejercicio 5:

Demuestra que el diagrama de fases de todos los sistemas lineales de dos ecuaciones de primer orden con raíz nula doble es equivalente al del sistema

$$\dot{x} = x - sy; \qquad \dot{y} = \frac{1}{s}x - y$$

Con s $\neq 0$ arbitrario. Comprueba que la solución de este sistema es

$$x\,(t) = c_1 + (c_1 - c_2 s)t$$

$$y\,(t) = c_2 + \frac{1}{s}\,(c_1 - c_2 s)t$$

Dibuja el diagrama de fases y analiza la estabilidad del punto fijo (0,0).

Consideremos un sistema general

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} = a_1 x + b_1 y \\ \dot{y} = a_2 x + b_2 y \end{Bmatrix}$$

Identificando con nuestros coeficientes, tenemos que

$$a_1 = 1 \qquad b_1 = -s$$

$$a_2 = \frac{1}{s} \qquad b_2 = -1$$

Construimos el determinante y calculamos la ecuación característica,

$$P(m) = \begin{vmatrix} a_1 - m & b_1 \\ a_2 & b_2 - m \end{vmatrix} = m^2 - (a_1 + b_2)m + a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$$

Para que haya dos raíces nulas debe ocurrir que P(m) = $m^2 = 0$, por lo que

$$(a_1 + b_2) = 0$$

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$$

De estas dos ecuaciones sacamos la relación entre coeficientes

$$a_2 = \frac{a_1 b_2}{b_1} = -\frac{{a_1}^2}{b_1}$$

Sustituimos en nuestro sistema

$$\begin{Bmatrix} \frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{{a_1}^2}{b_1}\, x - a_1 y \end{Bmatrix}$$

Dividimos por a_1

$$\begin{Bmatrix} \frac{dx}{dt\, a_1} = x + \frac{b_1}{a_1} y = x - sy \\ \frac{dy}{dt\, a_1} = -\frac{a_1}{b_1}\, x - y = \frac{1}{S} x - y \end{Bmatrix} \text{ definiendo } s = -\frac{b_1}{a_1}$$

Introducimos las soluciones que nos dan en el sistema.

Llamamos T = ta_1

$$\begin{Bmatrix} x(T) = c_1 + (c_1 - c_2 s)T \\ y(T) = c_2 + \frac{1}{S}\,(c_1 - c_2 s)T \end{Bmatrix}$$

Tenemos que

$$\frac{1}{S} = \frac{y - c_2}{x - c_1}$$

y que

$$\begin{Bmatrix} x(0) = c_1 = x_0 \\ y(0) = c_2 = y_0 \end{Bmatrix}$$

Esto significa que las trayectorias son rectas de pendiente $\frac{1}{S}$, que pasan por los puntos (c_1, c_2), siendo estos arbitrarios.

- Cuando $c_1 - c_2 s = 0$ -> $c_2 = \frac{c_1}{S}$

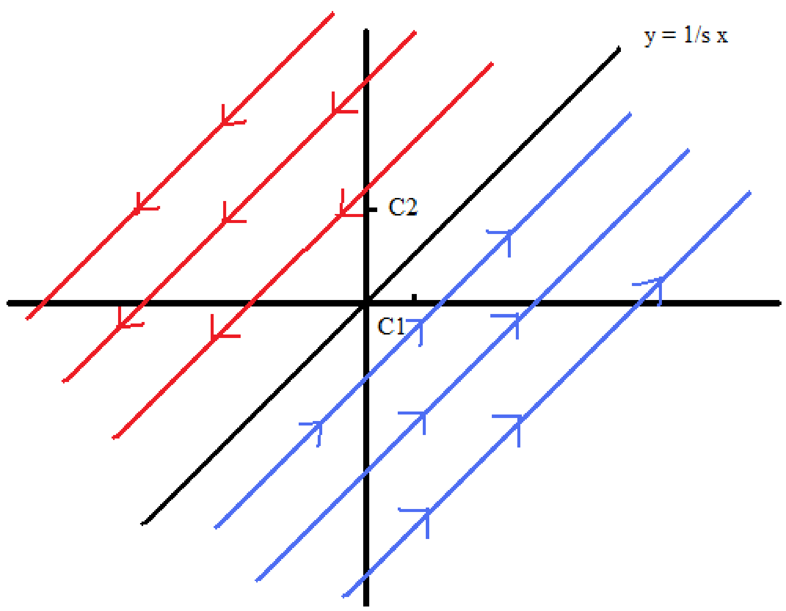
Sustituimos en el sistema,

$$\begin{cases} x(T) = c_1 & \rightarrow \dot{x}(T) = 0 \\ y(T) = c_2 = \frac{c_1}{S} & \rightarrow \dot{y}(T) = 0 \end{cases}$$

Luego

$\frac{x(T)}{y(T)} = \frac{c_1/_S}{c_1} = \frac{1}{S}$ es una recta de puntos singulares.

Diagrama de fases:



Región 1

En esta región $c_2 > \frac{c_1}{s}$

Del sistema anterior, sabemos que $c_1 - c_2 s < 0$ por lo tanto vemos que tanto x como y disminuyen.

Región 2

En esta región $c_2 < \frac{c_1}{s}$

Del sistema anterior, sabemos que $c_1 - c_2 s > 0$ por lo tanto vemos que tanto x como y aumentan.

El punto fijo (0,0) no es estable ya que todas las trayectorias acaban

“escapando” del entorno de (0,0).