Hoja 4

PROBLEMA 7 : Las ecuaciones de Lotka-Volterra:

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy$$

Con $a > 0$, $c > 0$, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ Pretenden describir la evolución de la población x de una especie (presas) que es cazada por otra especie (predadores) cuya población es y.

a) Discute la adecuación del sistema anterior a la descripción del sistema predador-presa e interpreta el significado de los coeficientes a, c, α, β .

- La constante -a- nos indica el crecimiento natural de la población de presas.
- La constante -c- nos indica el crecimiento natural de la población de depredadores.
- La cosatante α nos indica la variación de la población de presas debida a la interacción de ambas especies.
- La constante β nos indica la variación de la población de depredadores debido a la interacción entre las dos especies.

Atendiendo al sistema podemos apreciar que sin la interacción entre las dos especies la población de presas aumenta con el tiempo y la población de depredadores disminuye. La interacción hace disminuir la población de presas y aumentar la de depredadores.

b) Halla los puntos críticos del sistema y, mediante el análisis del sistema linealizado, discute su tipo y estabilidad. Haz un esquema de las trayectorias del sistema linealizado en las vecindades de los puntos críticos.

$$\left\{\begin{array}{c} ax - \alpha xy = 0 \\ -cy + \beta xy = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \qquad \text{P}(0,0)$$

$$\left\{\begin{array}{c} x(a - \alpha y) = 0 \\ y(\beta x - c) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x = \dfrac{c}{\beta} \\ y = \dfrac{a}{\alpha} \end{array} \qquad \text{P}\left(\frac{c}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$$

Analizamos los puntos:

Sistema linealizado:

$$\left\{\begin{array}{c} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = -cy \end{array}\right\} \qquad \text{Siendo } f(x,y) = -\alpha xy \ ; \ g(x,y) = \beta xy$$

P(0,0)

Vemos si cumple las condiciones.

i) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{vmatrix} = -ac \neq 0$ Por tanto cumple la condición.

ii) Las primeras derivadas parciales de f(x,y) y g(x,y) son continuas para todo (x,y). Por tanto cumple la segunda condición.

iii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \dfrac{f(r,\sigma)}{r} = \lim_{r\to 0} \dfrac{-\alpha.r.\cos\sigma.r.sen\sigma}{r} = 0$ ➔ **lo cumple**

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \dfrac{g(r,\sigma)}{r} = \lim_{r\to 0} \dfrac{-\beta.r.\cos\sigma.r.sen\sigma}{r} = 0$ ➔ **lo cumple**

Cumple las tres condiciones, por tanto es un punto crítico simple.

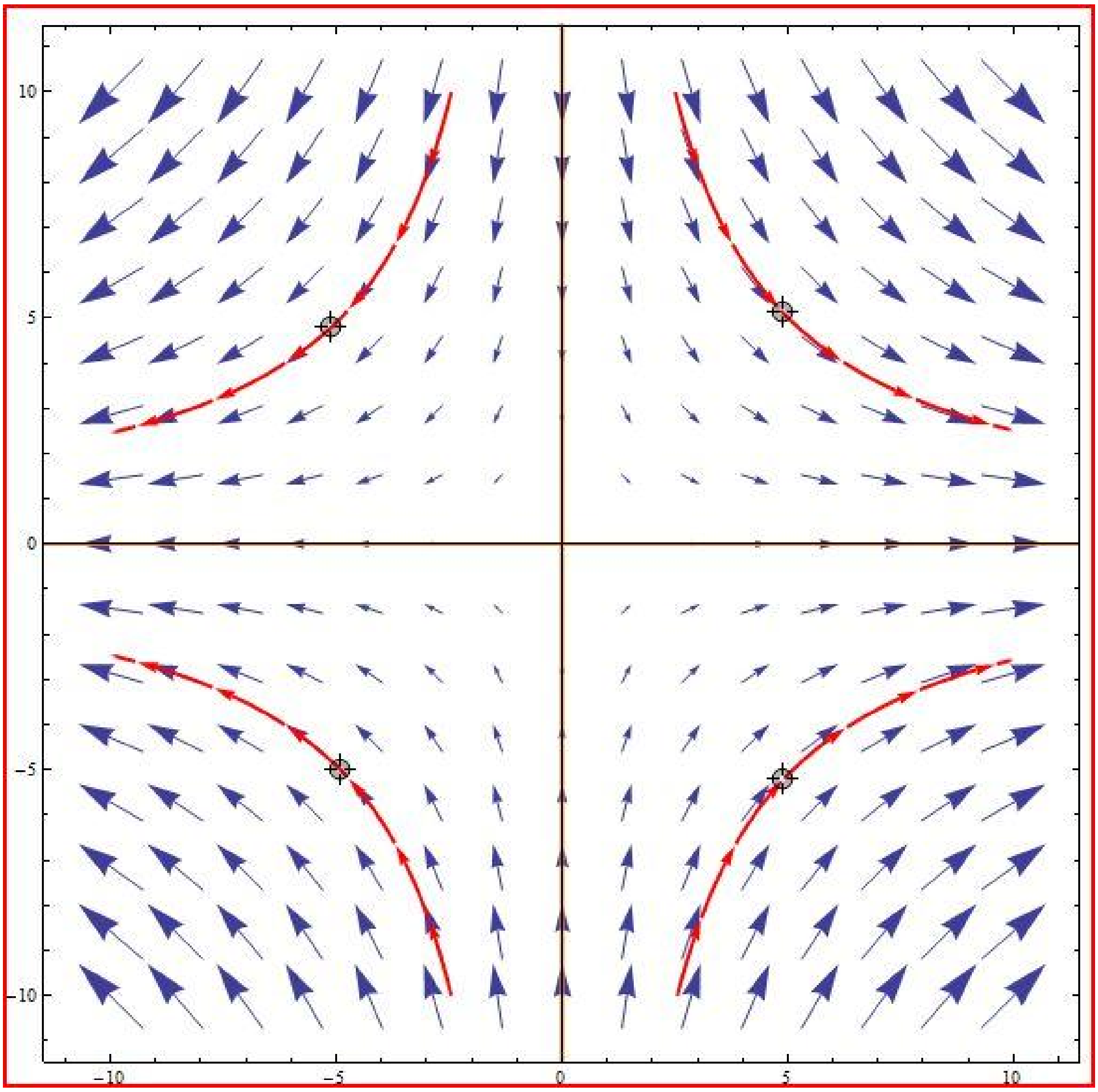
<u>Aplicamos el método de Euller</u>

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{mt} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ ➔ $\begin{matrix} mAe^{mt} = ae^{mt}A \\ mBe^{mt} = -ce^{mt}B \end{matrix}$ ➔

$\begin{vmatrix} a-m & 0 \\ 0 & -c-m \end{vmatrix} = (a-m)(-c-m) = -ac - am + mc + m^2 = m^2 + (c-a)m - ac = 0$

$m = \dfrac{(a-c) \pm \sqrt{(c-a)^2 + 4ac}}{2} = \begin{Bmatrix} m_1 = a \\ m_2 = -c \end{Bmatrix}$ ➔ **Punto de silla**

A continuación se muestra la representación. Se les ha dado un valor a los coeficientes, a=1 ; c=1



Ahora realicemos el mismo proceso para el otro punto crítico.

$$\mathrm{P}\left(\frac{c}{\beta},\frac{a}{\alpha}\right)$$

Antes de analizar si es un punto simple tenemos que cnsiderar el desplazamiento respecto al punto critico anterior.

$$x = u + x_o = u + \frac{c}{\beta} \qquad \dot{u} = au + \frac{ac}{\beta} - \alpha(u + \frac{c}{\beta})(v + \frac{a}{\alpha})$$

$$\Rightarrow$$

$$y = v + y_o = v + \frac{a}{\alpha} \qquad \dot{v} = -cv - \frac{ca}{\alpha} + \beta(u + \frac{c}{\beta})(v + \frac{a}{\alpha})$$

Operamos:

$$\dot{u} = au + \frac{ac}{\beta} - \alpha uv - \frac{\alpha ua}{\alpha} - \frac{\alpha cv}{\beta} - \frac{\alpha ca}{\alpha\beta} = -\frac{\alpha cv}{\beta} - \alpha uv$$

$$\dot{v} = -cv - \frac{ca}{\alpha} + \beta uv + \frac{\beta ua}{\alpha} + \frac{\beta cv}{\beta} + \frac{\beta ca}{\beta\alpha} = \frac{\beta a}{\alpha} u + \beta uv$$

El sistema linealizado quedará:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{\alpha c}{\beta} v \\ \dot{v} &= \frac{\beta a}{\alpha} u \end{aligned} \qquad \text{siendo :} \quad \begin{aligned} f(u,v) &= -\alpha uv \\ g(u,v) &= \beta uv \end{aligned}$$

Analizamos si es un punto crítico simple:

i) $\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\alpha c}{\beta} \\ \frac{\beta a}{\alpha} & \end{vmatrix} = ac \neq 0$ Lo cumple

ii) Las primeras derivadas parciales de f(u,v) y g(u,v) son continuas. Por lo tanto cumple esta condición

iii) $$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{f(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = \lim_{r\to\sigma} \frac{f(r,\sigma)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{-\alpha . r^2 sen\sigma \cos\sigma}{r} = 0$$

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{g(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = \lim_{r\to\sigma} \frac{g(r,\sigma)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{\beta . r^2 sen\sigma \cos\sigma}{r} = 0$$

Lo cumple.

Por tanto podemos asegurar que se trata de un punto crítico simple.

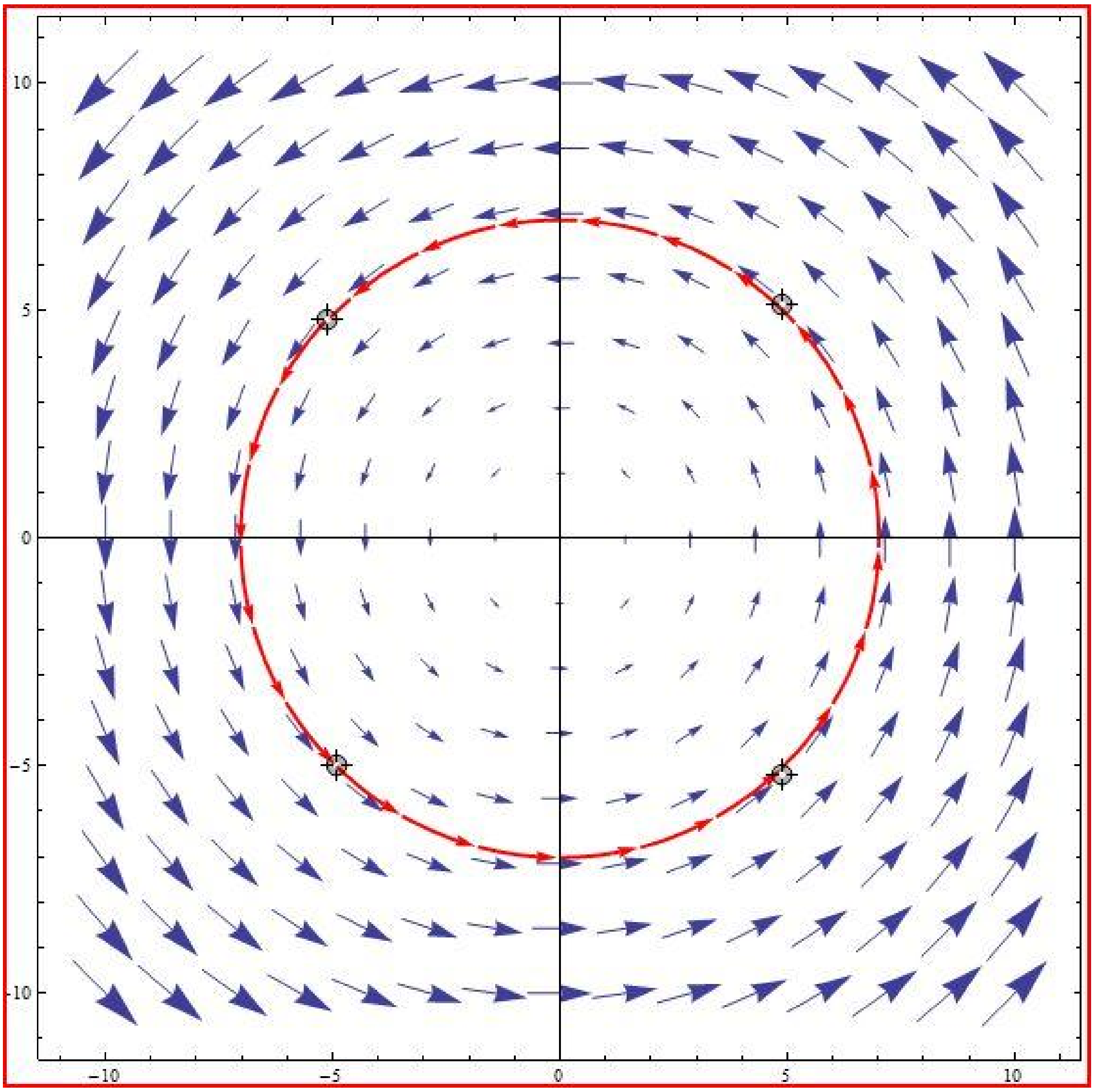
<u>Aplicamos el método de Euller</u>

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^{mt} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} mAe^{mt} &= -\frac{\alpha c}{\beta} e^{mt} B \\ mBe^{mt} &= \frac{\beta a}{\alpha} e^{mt} A \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} mA &= -\frac{\alpha c}{\beta} B \\ mB &= \frac{\beta a}{\alpha} A \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} m & \dfrac{\alpha c}{\beta} \\ \dfrac{\beta a}{\alpha} & -m \end{vmatrix} = -m^2 - ac = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm i\sqrt{ac} \quad \Rightarrow \quad \textbf{CENTRO}$$

Al analizarlo para el sistema lineal y ver que es un centro nos cabe la duda de si es un centro o un punto de espiral, para ello vamos a visualizar la representación del sistema.

Representamos el punto, para ello tomaremos los mismos valores de a y c que para el otro punto crítico (a=1 y c=1) y los valores de $\beta = 2; \alpha = 2$



c) Demuestra que la ecuación general de las trayectorias del sistema no lineal es $c\ln x - \beta x + a\ln y - \alpha y = const$. Dibuja estas trayectorias en el espacio de fases para las distintas condiciones iniciales.

Para ello no tenemos mas que calcular la variación población de y respecto a la de x (dy/dx):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy + \beta xy}{ax - \alpha xy}$$

$$dy(ax - \alpha xy) = dx(-cy + \beta xy)$$

Hacemos separación de variables e integramos:

$$dy\frac{a - \alpha y}{y} = dx\frac{-c + \beta x}{x}$$

$$\int dy\frac{a - \alpha y}{y} = \int dx\frac{-c + \beta x}{x} \quad \rightarrow \quad a\int\frac{dy}{y} - \alpha\int dy = \beta\int dx - c\int\frac{dx}{x}$$

$$a\ln y - \alpha y = \beta y - c\ln c + cte \quad \Rightarrow \quad a\ln y - \alpha y - \beta y + c\ln x = cte$$

Pasamos a la representación de las trayectorias, para ello debemos calcular los valores de las variables x, y de forma numérica.