FERNANDO GORDILLO
AMALIA TOBOSO
ÁNGEL HIERRO

Problema 10, HOJA 1

Halla todas las soluciones posibles (autofunciones) ψ_n (x) del problema de Sturm-Liouville:

$$y'' + 2y' + \lambda y = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$$

Escribe explícitamente las tres primeras autofunciones de este problema

a) ***Halla todas las soluciones posibles (autofunciones) ψ_n (x) del problema de Sturm-Liouville:***

$$y'' + 2y' + \lambda y = 0, \quad 0 \le x \le 1 \qquad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0 \qquad (2)$$

La ecuación (1) es equivalente a la ecuación de Sturm-Liouville:

$$p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + [q(x) + \lambda r(x)]y(x) = 0$$

si:

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = 2 \Longrightarrow p(x) = e^{2x}; \qquad q(x) = 0; \quad \frac{q(x) + \lambda r(x)}{p(x)} = \lambda \Longrightarrow r(x) = e^{2x}$$

y las condiciones de contorno (2) son del tipo de Neumann:

$$y'(a) = 0; \qquad y'(b) = 0$$

La ecuación (1) es una ecuación lineal de coeficientes constantes, su ecuación característica asociada es:

$$r^2 + 2r + \lambda = 0$$

cuya solución es:

$$r = -1 \pm \sqrt{1 - \lambda}$$

Tendremos tres casos posibles según el valor de λ:

- (1 - λ) = 0 ⇔ **λ = 1**:
  En este caso: *r = -1* es *raíz real doble* ($r_1 = r_2 \equiv r$)
  La solución de la ecuación (1) será entonces de la forma:

  $$y(x) = Ae^{rx} + Bxe^{rx}$$

  Luego:

  $$y(x) = e^{-x}(A + Bx)$$

  Aplicamos las condiciones de contorno. De la 1ª condición obtenemos que:

  $$y(0) = 0 \Longrightarrow y(0) = e^{-0}(A + B \cdot 0) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{A = 0}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{y(x) = Bxe^{-x}}$$

Y su derivada será:

$$y'(x) = e^{-x}(B - Bx)$$

De la 2ª condición de contorno obtenemos que:

$$y'(1) = 0 \implies y'(1) = e^{-1}(B - B) = 0 \implies B - B = 0 \implies \boldsymbol{B\ cualquiera}$$

Tomamos ***B = 1*** para simplificar. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{y(x) = xe^{-x}}$$

- (1 - λ) > 0 ⇔ **λ < 1**:
  En este caso: $r = -1 \pm \sqrt{1-\lambda}$; esto es, tendremos raíces reales simples y distintas.
  La solución de la ecuación (1) será entonces de la forma:

$$y(x) = Ae^{r_1 x} + Bxe^{r_2 x}$$

Por tanto:

$$y(x) = Ae^{(-1+\sqrt{1-\lambda})x} + Be^{(-1-\sqrt{1-\lambda})x} = e^{-x}(Ae^{x\sqrt{1-\lambda}} + Be^{-x\sqrt{1-\lambda}})$$

Aplicamos las condiciones de contorno. De la 1ª condición obtenemos que:

$$y(0) = 0 \implies y(0) = e^{-0}(Ae^{0\sqrt{1-\lambda}} + Be^{-0\sqrt{1-\lambda}}) = 0$$

$$\implies A + B = 0 \implies \boldsymbol{A = -B}$$

Luego:

$$y(x) = -Be^{-x}\left(e^{x\sqrt{1-\lambda}} - e^{-x\sqrt{1-\lambda}}\right) = -Be^{-x}\left[2 \cdot senh\left(\sqrt{1-\lambda}x\right)\right] \implies$$

$$\boldsymbol{y(x) = De^{-x} senh\sqrt{1-\lambda}x}$$

donde hemos definido una nueva constante: *D ≡ -2B.*
Así pues:

$$y'(x) = -De^{-x} senh\sqrt{1-\lambda}x + De^{-x} \cdot \sqrt{1-\lambda} \cdot cosh\sqrt{1-\lambda}x$$

Aplicamos la 2ª condición de contorno:

$$y'(1) = 0 \implies -De^{-1} senh\sqrt{1-\lambda} + De^{-1} \cdot \sqrt{1-\lambda} \cdot cosh\sqrt{1-\lambda} = 0 \implies$$

$$D[-senh\sqrt{1-\lambda} + \sqrt{1-\lambda} \cdot cosh\sqrt{1-\lambda}] = 0$$

Luego o: D = 0 ⟹ SOLUCIÓN TRIVIAL

o bien: $-senh\sqrt{1-\lambda} + \sqrt{1-\lambda} \cdot cosh\sqrt{1-\lambda} = 0 \implies$

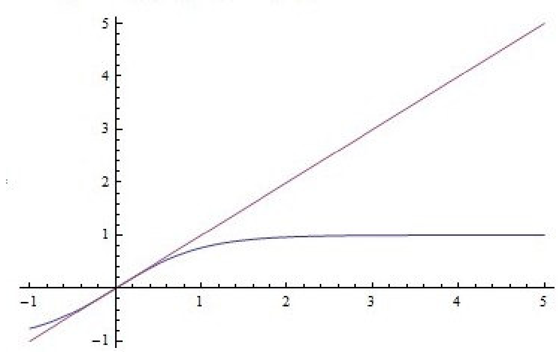
$$\frac{-senh\sqrt{1-\lambda}}{cosh\sqrt{1-\lambda}} + \sqrt{1-\lambda}\frac{cosh\sqrt{1-\lambda}}{cosh\sqrt{1-\lambda}} = 0 \Longrightarrow$$

$$tgh\sqrt{1-\lambda} = \sqrt{1-\lambda}$$

Obtenemos así la ecuación trascendente:

$$tgh\, z = z\,, \qquad z \equiv \sqrt{1-\lambda}$$

Esta ecuación no tiene solución explícita, pero pueden estimarse gráficamente sus raíces, (utilizamos el programa *Mathematica*):



Vemos que el único punto de corte de la recta *z* con la función *tgh z* es el origen, (el punto (0,0)), luego la solución obtenida es la SOLUCIÓN TRIVIAL, (*y(x) = 0*). Por lo tanto, no existe ningún autovalor λ menor que la unidad.

- (1 - λ) < 0 ⇔ **λ > 1**:
  En este caso: $r = -1 \pm i\sqrt{\lambda - 1}$; tendremos pues, raíces complejas conjugadas, (r = α ± iβ)

  La solución de la ecuación (1) será entonces:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} sen\beta x\,, \quad (\alpha = -1, \beta = \sqrt{\lambda - 1})$$

Luego:

$$y(x) = Ae^{-x} cos\sqrt{\lambda - 1}x + Be^{-x} sen\sqrt{\lambda - 1}x$$

Aplicamos las condiciones de contorno. De la 1ª condición obtenemos que:

$$y(0) = 0 \Longrightarrow y(0) = Ae^{-0} cos\sqrt{\lambda - 1} \cdot 0 + \mathrm{B}e^{-0} sen\sqrt{\lambda - 1} = 0 \Longrightarrow \mathbf{A = 0}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{y(x) = Be^{-x} sen\sqrt{\lambda - 1}x}$$

Y su derivada será:

$$y'(x) = Be^{-x} sen\sqrt{\lambda - 1}x + Be^{-x} \cdot \sqrt{\lambda - 1} \cdot cos\sqrt{\lambda - 1}x$$

De la 2ª condición de contorno obtenemos que:

$$y'(1) = 0 \Longrightarrow y'(1) = -Be^{-1}sen\sqrt{\lambda-1} + Be^{-1} \cdot \sqrt{\lambda-1} \cdot cos\sqrt{\lambda-1} = 0 \Longrightarrow$$

$$B[-sen\sqrt{\lambda-1} + \sqrt{\lambda-1} \cdot cos\sqrt{\lambda-1}] = 0$$

Luego o: B = 0 ⟹ SOLUCIÓN TRIVIAL

o bien: $-sen\sqrt{\lambda-1} + \sqrt{\lambda-1} \cdot cos\sqrt{\lambda-1} = 0 \Longrightarrow$

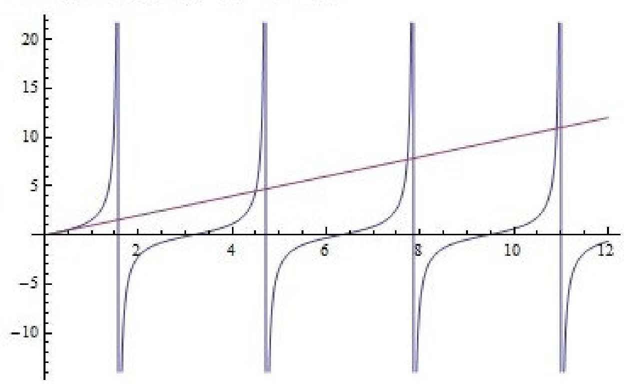
$$\frac{-sen\sqrt{\lambda-1}}{cos\sqrt{\lambda-1}} + \sqrt{\lambda-1}\frac{cos\sqrt{\lambda-1}}{cos\sqrt{\lambda-1}} = 0 \Longrightarrow tg\sqrt{\lambda-1} = \sqrt{\lambda-1}$$

Obtenemos así la ecuación trascendente:

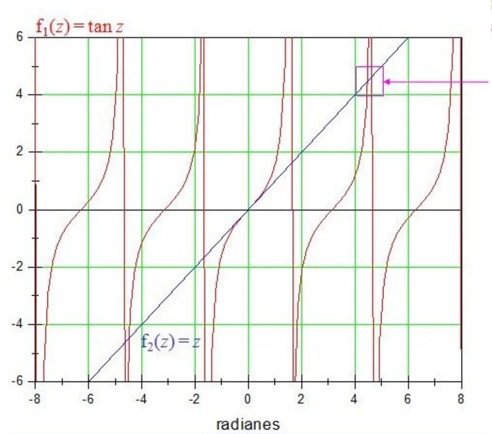
$$tg\ z = z\,, \qquad z \equiv \sqrt{\lambda-1}$$

que al no tener una solución explícita, estimaremos sus raíces gráficamente con un programa de cálculo simbólico, (Mathematica), calculando sus puntos de corte. Las raíces positivas más pequeñas serán entonces:

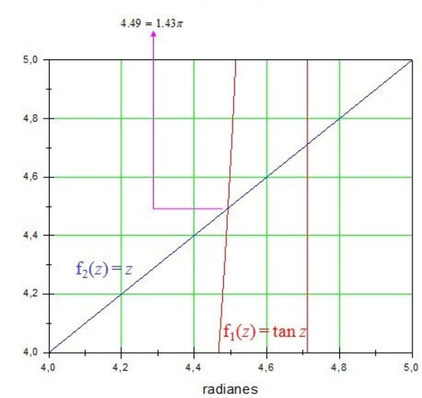
```
Plot[{Tan[z], z}, {z, 0, 12}]
```



$$z_1 \simeq 4.4934, \qquad z_2 \simeq 7.7252, \qquad z_3 \simeq 10.9041$$



Solución gráfica de la ecuación trascendente $\tan z = z$ cerca de la asíntota localizada en $z = 3\pi/2$ radianes (recuadro figura anterior)



Estos puntos de corte son los autovalores z_n de donde podemos hallar las autofunciones:

$$\psi_n(x) = Be^{-x} senz_n x \ , \ n = 1,2,3, \ldots ; \qquad (3)$$

$$donde: \ z_n = \sqrt{\lambda_n - 1} \Longrightarrow \ \lambda_n = \ {z_n}^2 + 1$$

No incluimos *n = 0* en la ecuación (3) porque este valor no conduce a *λ > 1*, (caso que estamos estudiando).

Como **B** es una constante cualquiera, y sabemos que autofunciones que difieren sólo en un factor constante son en realidad la misma autofunción, por sencillez no la incluimos en la expresión final:

$$\psi_n(x) = e^{-x} senz_n x \ , \qquad n = 1,2,3, \ldots ;$$

En particular:

$$\psi_1(x) = e^{-x} senz_1 x = \ e^{-x} sen4.4934x$$

$$\psi_2(x) = e^{-x} senz_2 x = \ e^{-x} sen7.7252x$$

$$\psi_3(x) = e^{-x} senz_3 x = \ e^{-x} sen10.9041x$$

b) Escribe explícitamente las tres primeras autofunciones de este problema:

Las tres primeras autofunciones $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ son:

$\lambda_0 = \ 1:$ $\qquad \psi_0(x) = xe^{-x}$

$\lambda_n = \ 1 + {z_n}^2:$ $\qquad \psi_n(x) = e^{-x} senz_n x$

$$\psi_1(x) = e^{-x} sen4.4934x$$

$$\psi_2(x) = \ e^{-x} sen7.7252x$$