Víctor Babiano Suárez
Leticia Jaén Tapia

Hallar la solución de la ecuación diferencial no homogénea

$$y''+k^2\left[1+a\delta(x)\right]y=F_0, \qquad a,F_0=ctes;(-L\le x\le L),$$

sujeta a las condiciones de contorno $y(-L)=y(L)=0,$ **expresándola como combinación lineal de funciones de un conjunto completo.**

Identificamos las partes de la ecuación diferencial

$$L=\frac{d^2}{dx^2}$$

r(x)= $\left[1+a\,\delta(x)\right]$

$$\lambda=k^2$$

$$\lambda_n=k_n^2$$

Para resolver la ecuación diferencial emplearemos la función de Green:

$$G(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(\xi)\psi_n(x)}{\lambda-\lambda_n}$$

Pero previamente deberemos hallar la ecuación diferencial homogénea. Para ello nos ayudaremos del ejercicio 4 de esta relación de problemas, donde está resuelto.

Como la ecuación que queremos resolver tiene un delta de Dirac, será analizada tanto a la derecha como la izquierda de donde hace cero, eso nos dará los casos, los siguientes:

1) A=-B
   Entonces 2cos(K_nL)=asen(K_nL)

$$k_n\equiv\frac{\gamma}{L}\Rightarrow tg\,\gamma_n=\frac{2L}{a\gamma_n}$$

Los γn son las raíces de esta ecuación trascendente.

En este caso queda una constante libre (A=-B), entonces vamos a exigir que las autofunciones estén normalizadas.

2) K_nB-K_nA=0 → A=B

   Entonces K_mL=mπ

Aquí pasa igual, queda un parámetro libre y tenemos que exigir que las autofunciones estén normalizadas.

Las autofunciones que obtenemos son las siguientes:

1)

$$\psi_n(x) = \begin{cases} A_n sen\gamma_n \left(\frac{x}{L}+1\right); (-L \leq x \leq 0) \\ -A_n sen\gamma_n \left(\frac{x}{L}-1\right); (0 \leq x \leq +L) \end{cases}$$

2)

$$k_m = \frac{m\pi}{L}; m = 1,2,3,...$$

$$\psi_m(x) = \begin{cases} A_m senm\pi \left(\frac{x}{L}+1\right); (-L \leq x \leq 0) \\ -A_m senm\pi \left(\frac{x}{L}-1\right); (0 \leq x \leq +L) \end{cases}$$

Con las soluciones anteriores ya tendríamos la solución de la homogénea, pero vamos a exigir que los parámetros libres además de ortogonales sean ortonormales, estén normalizados.

$$\mu \equiv n, m$$
$$\nu \equiv n, m$$

Si

$$\int_{-L}^{+L} dx\left[1+a\delta(x)\right]\psi_\mu(x)\psi_\nu(x) = \int_{-L}^{+L} dx\psi_\mu(x)\psi_\nu(x) + a\psi_\mu(0)\psi_\nu(0) = 0$$

si $\mu \neq \nu$, y:

$$\int_{-L}^{+L} dx\left|\psi_\mu(x)\right|^2 + a\left|\psi_\mu(0)\right|^2 = 1$$

si $\mu = \nu$

Si no normalizamos las autofunciones no podemos usar la fórmula del bineal ya que ésta exige que estén normalizados.

$$si\_\mu \equiv n : A_n = \left[L\left(1+\frac{a}{2L}sen^2\gamma_n\right)\right]^{-1/2}$$

$$si\_\mu \equiv m : A_m = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

Conociendo ya la función de Green y las autofunciones podemos resolver la ecuación diferencial.

Teniendo en cuenta los autovalores obtenidos resolviendo la homogénea, los aplicamos a la hora de construir la función de Green. Como tenemos dos casos quedaría de la siguiente forma:

$$G(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\xi)\psi_n(x)}{\lambda - \lambda_n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_m(\xi)\psi_m(x)}{\lambda - \lambda_m}$$

$$G(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[A_n sen\,\gamma_n\left(\frac{\xi}{L}+1\right)\right]\left[A_n sen\,\gamma_n\left(\frac{x}{L}+1\right)\right]}{k^2-k_n^2} + \frac{\left[-A_n sen\,\gamma_n\left(\frac{\xi}{L}-1\right)\right]\left[-A_n sen\,\gamma_n\left(\frac{x}{L}-1\right)\right]}{k^2-k_n^2}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left[A_m senm\pi\left(\frac{\xi}{L}+1\right)\right]\left[A_m senm\pi\left(\frac{x}{L}+1\right)\right]}{k^2-k_n^2} + \frac{\left[-A_m senm\pi\left(\frac{\xi}{L}-1\right)\right]\left[-A_m senm\pi\left(\frac{x}{L}-1\right)\right]}{k^2-k_n^2}$$

Para facilitar los cálculos consideraremos:

$$\psi_n(x) = A_n sen\gamma_n\left(\frac{x}{L} \pm 1\right)$$

$$\psi_m(x) = A_m senm\pi\left(\frac{x}{L} \pm 1\right)$$

Sacando factor común:

$$G(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n\psi_n(x)}{k^2-k_n^2}\left[sen\gamma_n\left(\frac{\xi}{L}+1\right) - sen\gamma_n\left(\frac{\xi}{L}-1\right)\right] +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m\psi_m(x)}{k^2-k_m^2}\left[senm\pi\left(\frac{\xi}{L}+1\right) - senm\pi\left(\frac{\xi}{L}-1\right)\right]$$

Hallando la función de Green la solución del problema es:

$$y(x) = \int_a^b dx' G(x,x') f(x')$$

Particularizando para nuestro caso:

$$y(x) = \int_{-L}^{+L} d\xi G(x,\xi) f(\xi)$$

siendo

$$f(\xi) = F_0$$

Como tenemos dos tipos de autofunciones, la solución nos queda de la siguiente forma:

$$y(x) = F_0 \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_n(x)}{\lambda - \lambda_n} \int_{-L}^{+L} d\xi \psi_n(\xi) + \frac{\psi_m(x)}{\lambda - \lambda_m} \int_{-L}^{+L} d\xi \psi_m(\xi) \right]$$

$$y(x) = F_0 \sum_{n,m=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\psi_n(x) A_n}{k^2 - \left(\dfrac{\gamma_n}{L}\right)^2} \left[\int_{-L}^{0} d\xi sen\gamma_n\left(\dfrac{\xi}{L}+1\right) - \int_{0}^{+L} d\xi sen\gamma_n\left(\dfrac{\xi}{L}-1\right) \right] + \\ + \dfrac{\psi_m(x) A_m}{k^2 - \left(\dfrac{m\pi}{L}\right)^2} \left[\int_{-L}^{0} d\xi senm\pi\left(\dfrac{\xi}{L}+1\right) - \int_{0}^{+L} d\xi senm\pi\left(\dfrac{\xi}{L}-1\right) \right] \end{array} \right\}$$

A continuación, resolvemos las integrales, para ello emplearemos un cambio de variable que indicaremos en cada caso.

Para $\int_{-L}^{0} d\xi sen\gamma_n\left(\frac{\xi}{L}+1\right)$, el cambio de variable sería $x = \gamma_n\left(\frac{\xi}{L}+1\right)$,

$$\frac{L}{\gamma_n}\int_{-\gamma_n}^{0} dxsenx = \frac{L}{\gamma_n}\int_{0}^{\gamma_n} dxsenx = -\frac{L}{\gamma_n}\cos x\Big|_0^{\gamma_n} = \frac{L}{\gamma_n}(1-\cos\gamma_n)$$

Para $\int_{0}^{+L} d\xi sen\gamma_n\left(\frac{\xi}{L}-1\right)$, el cambio de variable sería $x = \gamma_n\left(\frac{\xi}{L}-1\right)$,

$$\frac{L}{\gamma_n}\int_{-\gamma_n}^{0} dxsenx = \frac{L}{\gamma_n}\int_{0}^{\gamma_n} dxsenx = -\frac{L}{\gamma_n}\cos x\Big|_0^{\gamma_n} = \frac{L}{\gamma_n}(1-\cos\gamma_n)$$

Estas dos integrales, como podemos observar, se simplifican al sumarse:

$$\int_{-L}^{0} d\xi sen\gamma_n\left(\frac{\xi}{L}+1\right) + \int_{0}^{+L} d\xi sen\gamma_n\left(\frac{\xi}{L}-1\right) = \frac{2L}{\gamma_n}(1-\cos\gamma_n)$$

Por otro lado,

para $\int_{-L}^{0} d\xi senm\pi\left(\frac{\xi}{L}+1\right)$, el cambio de variable sería $x = m\pi\left(\frac{\xi}{L}+1\right)$,

$$\frac{L}{m\pi}\int_{0}^{m\pi} dxsenx = -\frac{L}{\gamma_n}\cos x\Big|_0^{m\pi} = \frac{L}{m\pi}\left[(-1)^{m+1}+1\right]$$

Para $\int_{0}^{+L} d\xi senm\pi\left(\frac{\xi}{L}-1\right)$, el cambio de variable sería $x = m\pi\left(\frac{\xi}{L}-1\right)$,

$$\frac{L}{m\pi}\int_0^{m\pi} dxsenx = -\frac{L}{\gamma_n}\cos x\Big|_0^{m\pi} = \frac{L}{m\pi}\left[(-1)^{m+1}+1\right]$$

Luego la solución de la ecuación inhomogénea quedaría:

$$y(x) = 2LF_0\sum_{n,m=1}^{\infty}\left\{\frac{A_n}{k^2-\left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^2}\psi_n(x)\left[\frac{1}{\gamma_n}(1-\cos\gamma_n)\right]+\frac{A_m}{k^2-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}\psi_m(x)\left[\frac{1}{m\pi}\left[(-1)^{m+1}+1\right]\right]\right\}$$

En la solución se puede observar que para el sumatorio de la m, los términos pares se anulan todos, al ser $\left[(-1)^{m+1}+1\right]$, entonces solo nos quedaríamos con los impares, pero también se observa que para los términos impares del sumatorio es la misma constante de siempre:

$$\frac{1}{m\pi}\left[(-1)^{m+1}+1\right] = \frac{2}{m\pi} \quad \text{, para m impar.}$$

Para asegurar que m sea impar, hacemos la siguiente transformación, quedando la solución de la siguiente manera:

$$y(x) = 2LF_0\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{A_n}{k^2-\left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^2}\psi_n(x)\left[\frac{1}{\gamma_n}(1-\cos\gamma_n)\right]\right\}+\frac{4}{\pi}LF_0\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{2m+1}}{k^2-\left(\frac{2m+1}{L}\right)^2}\psi_{2m+1}(x)$$