Alumnas: **Isabel María Alfonso Naranjo**
**Clara Eugenia Martínez Vázquez**

# Métodos de la física matemática

HOJA 1

***Ejercicio nº13***.- **Sea el problema no homogéneo $y'' + y = \operatorname{sen} x$ con las condiciones de contorno $y(0)= y'(2\pi)=0$. (a) Halla la función de Green mediante un desarrollo en serie de las autofunciones normalizadas correspondientes. (b) Obtén la función de Green en forma cerrada. (c) A partir de ella, resuelve el problema no homogéneo. (d) Halla la solución para las condiciones de contorno no homogéneas $y(0)=2$, $y'(2\pi)=0$.**

***Solución:***

A

La ecuación que nos dan en el enunciado es una ecuación diferencial de Sturm-Louville no homogénea.

De acuerdo con esta ecuación tenemos que el operador de Sturm-Liouville es:

$$L= \frac{d^2}{dy^2}$$

Y su función peso $r(x)=1$.

Vamos a calcular la solución del problema de Sturm-Liouville en términos de una serie de autofunciones del operador de Sturm-Liouville L. La ecuación de autovalores de L es:

$$\frac{d^2}{dx^2} y_n = -\lambda_n \cdot y_n \qquad (1)$$

Queremos hallar todos los valores posibles de $\lambda$ que hagan que la ecuación (1) tenga soluciones que satisfagan las condiciones de contorno. Además hallaremos cuáles son estos autovalores.

Las condiciones de contorno son : $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(2\pi) = 0 \end{cases}$

Vamos a discutir los distintos casos para los valores de $\lambda$:

- Si $\lambda_n = 0$, la solución general es:

  $y(x) = Ax + B$

  Aplicando las condiciones de contorno: $\underline{y(0) = B = 0}$ y

  $\underline{Y'(2\pi) = A = 0}$

  Es decir, el único modo de que esta solución satisfaga las condiciones de contorno es A=B=0. Con lo cual, la única solución posible es la TRIVIAL.

- Si $\lambda_n < 0$, la solución general es:

  $y(x) = A\cdot e^{\sqrt{-\lambda_n}\cdot x} + B\cdot e^{-\sqrt{-\lambda_n}\cdot x}$

  Aplicando las condiciones de contorno:
  $y(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B \Rightarrow$ $\mathbf{y(x) = A'senh\sqrt{-\lambda_n}\cdot x}$

  $\mathbf{y'(2\pi) = \sqrt{-\lambda_n}\cdot A'cosh\sqrt{-\lambda_n}(2\pi) = 0}$; esta condición se verificará si se cumple, al menos, uno de los siguientes casos:

    - $\mathbf{cosh\sqrt{-\lambda_n}(2\pi) = 0}$
      La cual es imposible si $\lambda<0$

- $\sqrt{-\lambda_n}=0 \Rightarrow \lambda_n = 0$

  Esta la desechamos pues no satisface la suposición inicial de que $\lambda_n < 0$ (además fue analizada anteriormente y conduce a la solución trivial.

- **A'=0**
  Cuyo resultado es la solución trivial.

Con lo cual, si $\lambda_n \leq \mathbf{0}$, no existe ninguna solución posible ( a parte de la trivial) del problema de Sturm-Liouville (1)

- Si $\lambda_n > 0$, la solución general es:

$$y_n(x)=c_1 \cdot \text{sen}\sqrt{\lambda_n} \cdot x + c_2 \cdot \cos\sqrt{\lambda_n} \cdot x$$

Utilizando las condiciones de contorno obtenemos:

- $y_n(0)=0 \Rightarrow c_1 + c_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

Con lo cual $y_n(x)=c_1 \cdot \text{sen}\sqrt{\lambda_n} \cdot x$

- $y_n'(2\pi)=0 \Rightarrow c_1\sqrt{\lambda_n}(\cos\sqrt{\lambda_n}(2\pi))=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_n}(2\pi)= (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}$

Los autovalores son:

$$\lambda_n=\left(\frac{2n+1}{4}\right)^2$$

y las autofunciones correspondientes son , por tanto, de la forma:

$$y_n = c_1 \cdot \mathrm{sen}(\frac{2n+1}{4}) \cdot x$$

Sin embargo estas autofunciones no están normalizadas a la unidad, por tanto busquemos su norma.

$$||y_n||^2 = < y_n|y_n > = \int_0^{2\pi} dx \cdot |y_n|^2 \cdot r(x) = c_1{}^2 \int_0^{2\pi} dx \cdot \mathrm{sen}^2(\frac{2n+1}{4}) \cdot x$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{sen}^2(\frac{2n+1}{4}) \cdot x}{4(\frac{2n+1}{4})}]_0^{2\pi} = c_1{}^2 \cdot \pi$$

La constante $c_1$ deberá adquirir el siguiente valor:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

De forma que las autofunciones normalizadas quedarán como:

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \mathrm{sen}(\frac{2n+1}{4}) \cdot x$$

Pudiendo hallar ya la función de Green mediante el desarrollo en serie de las autofunciones normalizadas. Para ello usaremos la fórmula que sigue:

$$G(x,\xi) = \sum_n \frac{y_n(x) y_n^*(x)}{\lambda - \lambda_n}$$

Sabiendo que la ecuación del enunciado es una ecuación de Sturm-Liouville, tenemos que: $\lambda=1$.Y por el proceso de cálculo anterior: $\lambda_n=(\frac{2n+1}{4})^2$

Finalmente, se tiene que:

$$\mathbf{G(x,\xi)=\frac{1}{\pi}\sum_0^\infty \frac{sen(\frac{2n+1}{4})\cdot x\cdot sen(\frac{2n+1}{4})\cdot\xi}{1-(\frac{2n+1}{4})^2}}$$

B

Ahora tratamos de hallar la fórmula de Green de este problema de Sturm-Liouville en forma cerrada. De esta manera:

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x,\xi)+G(x,\xi)=\delta(x-\xi)$$

Particularizando las condiciones de contorno:

$$G(0,\xi)=0 \quad y \quad G'(2\pi,\xi)=0$$

Entonces:

Si $x\neq\xi$ $\Rightarrow$ $G''+G'=0$ $\Rightarrow$ $G=A\text{sen}x+B\cos x$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Para } 0<x<\xi \longrightarrow & G_1=A_1\cdot \text{sen}x+B_1\cdot\cos x \\ \text{Para } \xi<x<2\pi \longrightarrow & G_2=A_2\cdot \text{sen}x+B_2\cdot\cos x \end{array}\right\}$$

Luego si hacemos $G(0,\xi)$ obtendremos $B_1=0$, y si hacemos $G'(2\pi,\xi)$ obtendremos $A_2=0$

Quedándonos así:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} A_1(\xi)\cdot \operatorname{sen} x \\ \\ B_2(\xi)\cdot \cos x \end{cases} \qquad G'(x,\xi)=\begin{cases} A_1(\xi)\cdot \cos x \\ \\ -B_2(\xi)\cdot \operatorname{sen} x \end{cases}$$

Las condiciones de continuidad de G en ξ y de discontinuidad de G' en ξ, nos permitirá calcular las funciones $A_1$ y $B_2$.

$$\left.\begin{aligned} A_1(\xi)\cdot \operatorname{sen}\xi &= B_2(\xi)\cdot\cos\xi \\ -B_2(\xi)\cdot\operatorname{sen}\xi - A_1(\xi)\cdot\cos\xi &= \frac{1}{p(\xi)} = 1 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema obtendremos:

$$B_2(\xi)=-\operatorname{sen}\xi \qquad A_1(\xi)=-\cos\xi$$

Quedándonos la función de Green en forma cerrada de la siguiente manera:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} -\cos\xi\operatorname{sen}x & 0\le x\le\xi \\ \\ -\operatorname{sen}\xi\cos x & \xi\le x\le 2\pi \end{cases}$$

C

A partir del apartado anterior debemos resolver el problema no homogéneo. Con lo cual debemos hacer lo siguiente:

$$Y(x)=\int_0^{2\pi} d\xi \cdot f(\xi)\cdot G(x,\xi) = \int_0^{x} d\xi \cdot f(\xi)\cdot G_2(x,\xi) + \int_x^{2\pi} d\xi \cdot f(\xi)\cdot G_1(x,\xi) =$$

$$= \boldsymbol{cosx} \int_0^{x} d\xi \cdot sen\xi \cdot (-sen\xi) + \boldsymbol{senx} \int_x^{2\pi} d\xi \cdot sen\xi \cdot (-cos\xi) =$$

$$= -cosx\left(\frac{x}{2}-\frac{sen2x}{4}\right) - sex\left(-\frac{sen^2x}{2}\right) = \frac{senx}{2} - \frac{x\cdot cosx}{2}$$

*Operando y usando la fórmula del ángulo doble para el seno*

*(Sen2x= 2senx·cosx)*

D

Ahora hallamos la solución del problema de Sturm-Liouville inhomogéneo para las condiciones de contorno no homogéneas y(0)=2 y y'(2π)=0

Lo primero que tenemos que hacer en este caso es encontrar la función de Green del problema homogéneo. Como ya conocemos la función de Green del problema homogéneo, calculamos la función $F_1(x)$. El problema de Sturm-Liouville para $F_1(x)$ es:

$$F_1'' + F_1 = 0$$

$$\text{C.C} \quad \begin{cases} F_1(0) = 2 \\ F_1'(2\pi) = 0 \end{cases}$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$F_1 = A\cdot cosx + Bsenx$$

Imponiendo las condiciones de contorno, obtenemos los siguientes valores para los coeficientes: A=2 y B=0.

Si los sustituímos en $F_1$, nos quedará:

$$F_1 = 2\cos x$$

Por tanto la solución del problema de Sturm-Liouville inhomogéneo vendrá dada por:

$$\tilde{y}(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2} - \frac{x \cdot \cos x}{2} + 2\cos x$$