Sara Benítez Berrocal
Sara Gutiérrez López

Problema 15

a) Resuelve el problema de autovalores $y'' = -\lambda y$ ***con las condiciones de contorno*** $y(0) = y(\pi) + y'(\pi) = 0$**.**

Inicialmente para resolver el ejercicio debemos sacar las raíces de la ecuación diferencial $y'' + \lambda y = 0$

Las raíces son $\pm\sqrt{-\lambda}$, por tanto la solución es:

$$y(r) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$$

Aplicando las condiciones de contorno:

- Para $\lambda = 0$

  La ecuación diferencial quedaría de la siguiente forma,

  $$y'' = 0$$

  Siendo la solución,

  $$y(x) = Ax + B$$

  Y cumpliendo las condiciones de contorno,

  $$y(0) = 0 = B$$

  $$y'(\pi) + y(\pi) = 0 \quad \rightarrow \quad A(\pi + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0$$

  Llegamos a la solución trivial.

- Para $\lambda < 0$

  Utilizamos la solución general

  $$y_n(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\,x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$$

  A continuación, hacemos el siguiente cambio de variable,

$$-\lambda_n = k_n^2 > 0$$

Sustituyendo,

$$y_n(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

Aplicando de nuevo las condiciones de contorno,

$$y_n(0) = 0 \rightarrow A = -B$$

la función quedaría,

$$y_n(x) = A\, senh\, kx$$

y por la segunda condición,

$$y'(\pi) + y(\pi) = 0 \quad \rightarrow \quad y'(x) = A\, k \cosh kx$$

donde sustituyendo tenemos que,

$$y'(\pi) + y(\pi) = A\, senh\; k\pi + A\, k \cosh\; k\pi = 0$$

Para que esta ecuación se cumpla el parámetro *k* tiene que ser nulo, lo que contradice nuestra condición de partida ($k^2 > 0$). Por lo tanto, llegamos a la solución trivial. Entonces, la única posibilidad es que $\lambda > 0$.

- Para $\lambda > 0$

Utilizamos la solución general, con el cambio de variable $\lambda_n = k_n^2$,

$$y_n(x) = A \cos kx + B\, sen\, kx$$

Y como en apartados anteriores, aplicamos nuevamente las condiciones de contorno.

$$y_n(0) = 0 = A$$

$$y'(\pi) + y(\pi) = 0$$

$$y(x) = A \cos kx + B\; sen\; kx \quad \rightarrow \quad y(\pi) = B\; sen\; k\pi$$

$$y'(x) = -Ak\; sen\; kx + Bk \cos kx \quad \rightarrow \quad y'(\pi) = Bk \cos k\pi$$

Por tanto, de la segunda condición,

$$y'(\pi) + y(\pi) = 0 \quad \rightarrow \quad B\; sen\; k\pi + Bk \cos k\pi = 0$$

Para que se cumpla esta segunda condición tenemos tres posibilidades:

La primera es que $B = 0$, pero nos llevaría a la solución trivial.
La segunda es que $\lambda = 0$, pero ésta contradice nuestra condición de partida $\lambda > 0$.
Por último nos queda que,

$$sen\sqrt{\lambda}\pi + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0 \quad \rightarrow \quad tg\sqrt{\lambda}\pi = -\sqrt{\lambda}$$

Que es una ecuación trascendente cuyos autovalores son aquellas raíces de esta ecuación.
Gráficamente, si representamos las dos funciones, las intersecciones de las dos serían las soluciones.

Sustituyendo en nuestra solución general obtenemos la autofunción

$$\boxed{y_n(x) = B\,sen\sqrt{\lambda_n}x}$$

b) Encuentra la función de Green de $y'' = f(x)$ que satisface las condiciones de contorno anteriores mediante desarrollo en serie y también en forma cerrada.

<u>Desarrollo en serie</u>

Considerando la ecuación de Sturm-Liouville,

$$p(x)y'' + p'(x)y' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0$$

identificamos los valores con nuestra ecuación diferencial, siendo

$$p(x) = 1$$
$$r(x) = 1$$
$$q(x) = 0$$
$$\lambda = 0$$

Teniendo en cuenta el apartado a), considerando los autovalores y la autofunción que hemos hallado y tomando, por ejemplo, el valor de la constante B=1 ya que no influye en nuestra autofunción, aplicamos la fórmula del desarrollo en serie:

$$G(x,\xi) = \sum_n \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \frac{\psi_n(x)\psi_n(\xi)}{\lambda - \lambda_n}$$

Calculamos la norma,

$$\|\psi_n\|^2 = \langle \psi_n \mid \psi_n \rangle = \int_0^{\pi} dx\, r(x)\, \psi_n(x)\, \psi_n(x) = \int_0^{\pi} dx\, sen^2 \sqrt{\lambda_n}\, x =$$
$$= \int_0^{\pi} \left[1 - \cos^2 \sqrt{\lambda_n}\, x\right] dx = \int_0^{\pi} \left[1 - \left(\frac{1 + \cos 2\sqrt{\lambda_n}\, x}{2}\right)\right] dx =$$
$$= \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4\sqrt{\lambda_n}} sen \sqrt{\lambda_n}\pi$$

Por tanto, sustituyendo en la fórmula del desarrollo en serie,

$$G(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen \sqrt{\lambda_n}\, x\; sen \sqrt{\lambda_n}\; \xi}{\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4\sqrt{\lambda_n}} sen \sqrt{\lambda_n}\pi\right)(-\lambda_n)}$$

<u>Forma cerrada</u>

Tomando nuevamente la autofunción y autovalores del apartado a) y aplicando las condiciones de contorno,

$$G(0,\xi) = G(\pi,\xi) + G'(\pi,\xi) = 0$$

a la función de Green,

$$G(x,\xi) = \begin{cases} ax + b & 0 \le x < \xi \\ cx + d & \xi < x \le \pi \end{cases}$$

tenemos que para,

$$G(0) = 0 = b$$
$$G(\pi) + G'(\pi) = 0 \quad \rightarrow \quad (c\pi + d) + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = -\frac{d}{\pi + 1}$$

Sustituyendo en la función de Green,

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a(\xi)x & 0 \le x < \xi \\ d(\xi)\left(1 - \dfrac{x}{\pi + 1}\right) & \xi < x \le \pi \end{cases}$$

A continuación aplicamos las condiciones de continuidad y salto finito.

Por la condición de continuidad, igualamos las dos partes de la función de Green, obteniendo como resultado,

$$a\xi = d\left(1 - \frac{\xi}{\pi + 1}\right)$$

Y por la condición de salto finito,

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x>\xi} - \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x<\xi} = \frac{1}{p(x)} = 1$$

Tenemos,

$$\frac{d}{\pi + 1} - a = 1 \quad \rightarrow \quad a = \frac{d}{\pi + 1} - 1$$

Sustituyendo el valor de *a* en nuestra condición de continuidad, obtenemos el valor,

$$d = -\xi$$

Volvemos a sustituir estos valores en nuestra función de Green,

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \left(\dfrac{\xi}{\pi + 1} - 1\right)x & 0 \le x < \xi \\ -\xi\left(1 - \dfrac{x}{\pi + 1}\right) & \xi < x \le \pi \end{cases}$$

Podemos concluir que efectivamente se cumple la condición de simetría

$$G(x,\xi) = G(\xi, x)$$