MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

18) Sea la ecuación de Sturm-Liouville no homogénea:

$$y'' - m^2 y = f(x), \qquad 0 \le x, \qquad y(1) = 0, \qquad y(\infty) < \infty$$

donde m > 0. Se pide hallar la función de Green correspondiente en forma cerrada.

Solución:

Tenemos el siguiente problema:

$$y'' - m^2 y = f(x) \rightarrow G'' - m^2 G = \delta(x - \xi) \qquad 0 \le x$$

$$\left.\begin{array}{l} y(1) = 0 \rightarrow G(1) = 0 \\ y(\infty) < \infty \text{ (finito)} \rightarrow G(\infty) < \infty \text{ (finito)} \end{array}\right\} \text{Condiciones de Contorno}$$

$$p(x) = 1$$

Para encontrar la función de Green debemos resolver el problema homogéneo:

$$G'' - m^2 G = 0 :$$

$$G^2 - m^2 = 0 \rightarrow G^2 = m^2 \rightarrow G = \pm m$$

Así pues, la función de Green asociada a nuestro problema nos queda de la forma siguiente:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} & 0 < x < \xi \\ C_3 e^{mx} + C_4 e^{-mx} & \xi < x < \infty \end{cases}$$

Para calcular las constantes C_i deberemos imponer tantas condiciones como constantes tengamos. En primer lugar aplicamos las 2 condiciones de contorno que nos aporta el problema:

I. $G(1) = 0$
II. $G(\infty) < \infty$ (finito)

De I obtenemos que:

$$C_1 e_m + C_2 e^{-m} = 0 \rightarrow C_1 e^{m} = -C_2 e^{-m} \rightarrow C_2 = -C_1 e^{2m}$$

De II obtenemos que:

$$C_3 e^{\infty} + C_4 e^{-\infty} < \infty \rightarrow C_3 \cdot \infty + C_4 \cdot 0 < \infty \rightarrow C_3 = 0$$

Sustituyendo estos valores de las constantes en la función que teníamos, la función de Green nos va quedando:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} C_1\, e^{mx} - C_1\, e^{-2m} \cdot e^{-mx} & 0 < x < \xi \\ C_4\, e^{-mx} & \xi < x < \infty \end{cases}$$

Podemos simplificar la función reagrupando términos de forma que:

$$G(x,\xi) = C_1\, e^{mx} - C_1\, e^{-2m} \cdot e^{-mx} = C_1\, e^{m}\,(e^{-m}\, e^{mx} - e^{m}\, e^{-mx}) =$$

$$= C_1\, e^{m}\,(e^{m(x-1)} - e^{-m(x-1)}) = C_1\, e^{m}\, \mathrm{sh}\, m(x-1)$$

Por lo que la función queda:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} C_1\, e^{m}\, \mathrm{sh}\, m(x-1) & 0 < x < \xi \\ C_4\, e^{-mx} & \xi < x < \infty \end{cases}$$

Para encontrar las otras 2 constantes que nos quedan por hallar, recurrimos a las propiedades vistas en teoría de la función de Green:

III. Continuidad de la función de Green: $G(\xi^{+},x) = G(\xi^{-},x)$
IV. Salto finito en la primera derivada: $G'(\xi^{+},x) - G'(\xi^{-},x) = 1 / p(\xi)$

De III tenemos que:

$$C_1\, e^{m}\, \mathrm{sh}\, m(\xi - 1) - C_4\, e^{-m\xi} = 0 \qquad (1)$$

De IV tenemos que:

$$-mC_4\, e^{-m\xi} - mC_1\, e^{m}\, \mathrm{ch}\, m(x - 1) = 1 \qquad (2)$$

De (1) despejamos C_4 y lo sustituimos en (2):

$$C_4 = C_1 e^{m} \cdot \mathrm{sh}\, m(\xi - 1) \cdot e^{m\xi} = 1/m\,[(-e^{-m\xi}\, e^{m\xi}\, e^{m}) \cdot \mathrm{sh}\, m(\xi - 1)] =$$
$$= -1/m\,(e^{m} \cdot \mathrm{sh}\, m(\xi - 1))$$
$$-mC_1\, e^{m} \cdot \mathrm{sh}\, m(\xi - 1) \cdot e^{m\xi}\, e^{-m\xi} - mC_1\, e^{m} \cdot \mathrm{ch}\, m(\xi - 1) = 1$$
$$-mC_1\, e^{m} \cdot (\mathrm{sh}\, m(\xi - 1) + \mathrm{ch}\, m(\xi - 1)) = 1$$

Usando la relación: $\mathrm{sh}\, u + \mathrm{ch}\, u = e\, u$

$$-mC_1\, e^{m}\, e^{m(\xi - 1)} = -mC_1\, e^{m(1 + \xi - 1)} = -mC_1\, e^{m\xi} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boldsymbol{C_1 = -e^{-m\xi} / m}$$

Conocida C_1 sustituimos su valor en C_4 y nos queda:

$$C_4 = 1/m\,[(-e^{-m\xi}\, e^{m\xi}\, e^{m}) \cdot \mathrm{sh}\, m(\xi - 1)] = -1/m(e^{m} \cdot \mathrm{sh}\, m(\xi - 1)) \rightarrow$$

$$\rightarrow C_4 = -1/m(e^{m} \cdot sh\, m(\xi - 1))$$

Una vez obtenido el valor de todas las constantes la función final de Green nos queda de la forma:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -e^{-m\xi} / m\, [e^{m}\, sh\, m(x-1)] & 0 < x < \xi \\ e^{-mx} - [1/m(e^{m} \bullet sh\, m(\xi - 1))] & \xi < x < \infty \end{cases}$$

$$\boxed{G(x,\xi) = \begin{cases} [-e^{-m(\xi-1)} \cdot sh\, m(x-1)]/m & 0 < x \leq \xi \\ [-e^{-m(x-1)} \cdot sh\, m(\xi - 1)]/m & \xi \leq x < \infty \end{cases}}$$

ALMUDENA SÁNCHEZ RODRÍGUEZ
JESÚS CINTAS LEAL