PROBLEMA DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Hoja 1. Problema 5

Juan Jesús Fraire González
Daniel Díaz Simón
Borja Balcárcel Gómez

a) Halla la ecuación trascendente que determina los autovalores λ_n y obtén las autofunciones $\psi_n(x)$ del problema de Sturm-Liouville definido por la ecuación diferencial $y''(x) = -\lambda_n y(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq a$ con las condiciones de contorno $y(0) + ay'(0) = 0,\ \ y(a) - ay'(a) = 0$.

b) ¿Existe en general solución del problema inhomogéneo

$$y''(x) + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 y(x) = f(x),\ \ y(0) + ay'(0) = y(a) - ay'(a) = 0\,?$$

En caso afirmativo halla la ecuación de Green correspondiente.

---

a) Halla la ecuación trascendente que determina los autovalores λ_n y obtén las autofunciones $\psi_n(x)$ del problema de Sturm-Liouville definido por la ecuación diferencial $y''(x) = -\lambda_n y(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq a$ con las condiciones de contorno $y(0) + ay'(0) = 0,\ \ y(a) - ay'(a) = 0$.

Obtenemos la ecuación diferencial, en forma operacional, que proviene del problema de Sturm-Liouville. Identificando $L = D^2$; $p(x) = 1$; $r(x) = 1$ y $q(x) = 0$, tenemos que:

$$(D^2 + \lambda)y = 0 \qquad \text{que resolvemos :} \qquad D = \pm\sqrt{-\lambda}$$

Analizamos los diferentes casos para λ:

1) $\lambda = 0$

La solución general es:

$$y(x) = Ax + B$$

Para determinar las constantes A y B aplicamos las condiciones de contorno.

$$\begin{cases} y(0) + ay'(0) = 0 \\ y(a) - ay'(a) = 0 \end{cases} \qquad y'(x) = A$$

1º- $\quad y(0) + ay'(0) = 0 \Rightarrow B + aA = 0 \Rightarrow B = -aA$

Con lo que podemos escribir la solución como:

$$y(x) = Ax - aA$$

2º $\quad y(a) - ay'(a) = 0 \Rightarrow Aa - aA - aA = 0 \Rightarrow A = 0$

Por tanto, si consideramos el caso en que $\lambda = 0$ nos lleva a que $A = 0$ y $B = 0$, o sea, la solución trivial, con lo que podemos concluir que $\lambda = 0$ **no es autovalor.**

2) $\lambda < 0$

La solución general es:

$$y(x) = Ae^{x\sqrt{-\lambda}} + Be^{-x\sqrt{-\lambda}}$$

Aplicamos las condiciones de contorno.

$$\begin{cases} y(0) + ay'(0) = 0 \\ y(a) - ay'(a) = 0 \end{cases} \qquad y'(x) = \sqrt{-\lambda}Ae^{x\sqrt{-\lambda}} - \sqrt{-\lambda}Be^{-x\sqrt{-\lambda}}$$

1º) $\quad y(0) + ay'(0) = 0 \Rightarrow A + B + k(A - B = 0)$ $\qquad$ nota: $k = a\sqrt{-\lambda}$

2º) $\quad y(a) + ay'(a) = 0 \Rightarrow Ae^{k} + Be^{kk} + k\left(Ae^{k} - Be^{-k}\right) = 0$

Para que k conduzca a algún autovalor es necesario que el determinante formado por los coeficientes del sistema de ecuaciones anterior sea cero. Por lo tanto:

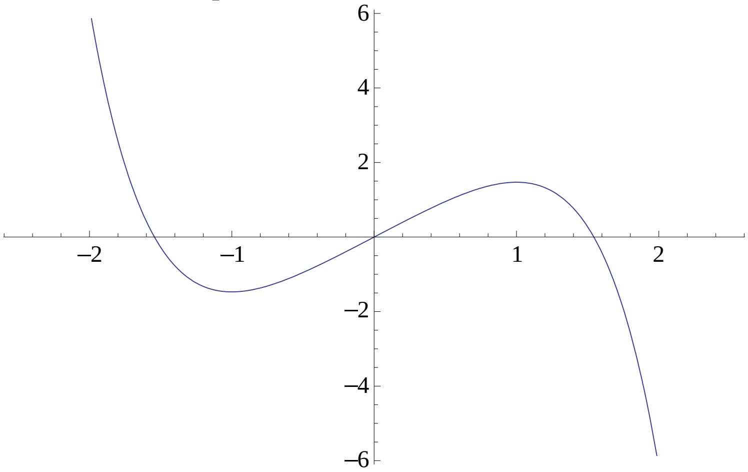
$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1+k & 1-k \\ e^{k}(1-m) & e^{-m}(1+m) \end{pmatrix}}^{\overline{\overline{K}}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

$$\left|\overline{\overline{K}}\right| = \begin{vmatrix} 1+k & 1-k \\ e^{k}(1-k) & e^{-k}(1+k) \end{vmatrix} = e^{-k}(1+k)^2 - e^{k}(1-k)^2 = 0$$

Por lo tanto la ecuación que determina los autovalores $\lambda < 0$ será:

$$e^{-k}(1+k)^2 - e^{k}(1-k)^2 = 0$$

Para resolver la ecuación necesitamos representarla gráficamente, o resolverla mediante un programa informático, así pues:



siendo las soluciones:

$$\begin{cases} k_1 = -1.5434 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 1.5434 \end{cases}$$

A continuación se resuelve de forma analítica esta ecuación para determinar los valores de k que hacen cero la ecuación, y a partir de ellos obtener los λ_n sin más que $\lambda = -(k/a)^2$. Por tanto los valores de λ_1 y de λ_3 nos llevan al mismo resultado, por lo que tenemos solamente dos autovalores.

Ahora para obtener las autofunciones debemos obtener los valores de A y B.

Por la 1º condición llegamos a:

$$A = -B\frac{(1-k)}{(1+k)}$$

Nota: A partir de la segunda condición deberíamos poder obtener las constantes, pero el problema se complicaría demasiado, por lo que vamos a dejar las autofunciones en función de k y de B:

$$y(x) = -B\frac{(1-k)}{(1+k)}e^{x\sqrt{-\lambda}} + Be^{-x\sqrt{-\lambda}} = B\left[e^{-x\sqrt{-\lambda}} - \frac{(1-k)}{(1+k)}e^{x\sqrt{-\lambda}}\right]$$

3) $\lambda > 0$

La solución general es:

$$y(x) = Ae^{x\sqrt{-\lambda}} + Be^{-x\sqrt{-\lambda}}$$

En este caso en el que $\lambda > 0 \rightarrow \sqrt{-\lambda} = i \pm \sqrt{\lambda}$
Por tanto:

$$y(x) = Ae^{ix\sqrt{\lambda}} + Be^{-ix\sqrt{\lambda}}$$

Pasando a combinación de trigonométricas:

$$y(x) = A'\cos(x\sqrt{\lambda}) + B'sen(x\sqrt{\lambda})$$

Aplicamos las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} y(0) + ay'(0) = 0 \\ y(a) - ay'(a) = 0 \end{cases} \qquad y'(x) = -\sqrt{\lambda}A'sen(x\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}B'\cos(x\sqrt{\lambda})$$

Nota: por simplicidad llamaremos $A' \equiv A$ y $B' \equiv B$ aunque no sean estrictamente las mismas constantes.

1º) $y(0) + ay'(0) = 0 \Rightarrow A + a\sqrt{\lambda}B = 0$

2º)

$$y(a) - ay'(0) = 0 \Rightarrow A\cos(a\sqrt{\lambda}) + Bsen(a\sqrt{\lambda}) - a\left[-\sqrt{\lambda}Asen(a\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}B\cos(a\sqrt{\lambda})\right] =$$
$$= A\left[\cos(a\sqrt{\lambda}) + a\sqrt{\lambda}sen(a\sqrt{\lambda})\right] + B\left[sen(a\sqrt{\lambda}) - a\sqrt{\lambda}\cos(a\sqrt{\lambda})\right] = 0$$

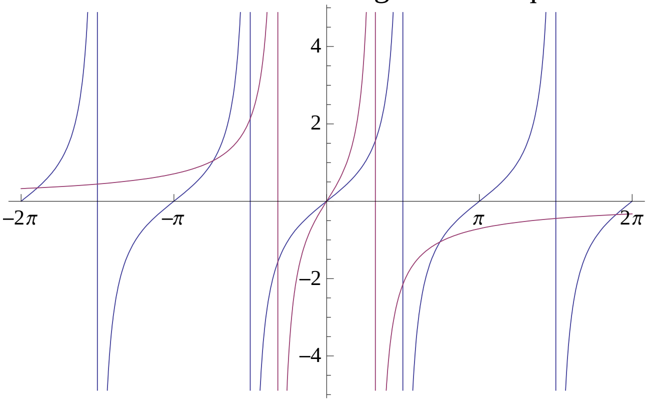
Nota: $k = a\sqrt{\lambda}$

$$\left.\begin{array}{c} A + kB = 0 \\ A[\cos k + ksenk] + B[senk - k\cos k] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & k \\ \cos k + ksenk & [senk - k\cos k] \end{pmatrix}}^{\overline{\overline{K}}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

De nuevo para ver si existe algún autovalor debemos ver si el determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones obtenido por las ecuaciones de contorno es igual a cero para algún valor de k.

$$\left|\overline{\overline{K}}\right| = \begin{vmatrix} 1 & z \\ \cos k + ksenk & senk - k\cos k \end{vmatrix} = (1-k^2)senk - 2k\cos k = 0 \Rightarrow \tan k = \frac{2k}{1-k^2}$$

Esta será por tanto la ecuación trascendente que nos dará los valores de los autovalores, que necesitaremos resolverla de igual forma que la anterior ecuación transcendente del ejercicio:



siendo infinito el número de soluciones, las tres primeras soluciones serían $k_1 = 2{,}33221,\ k_2 = 0$ y $k_3 = -2{,}33221$

Necesitamos volver a deshacer al cambio de variable para calcular los autovalores, por tanto, $\lambda = (k/a)^2$ implica que podemos coger solo las valores positivos de k , ya que los negativos nos llevan a la misma solución y el k=0 nos conduce a la trivial.

Nota: A partir de la segunda condición deberíamos poder obtener las constantes, pero el problema se complicaría demasiado, por lo que vamos a dejar las autofunciones en función de k y de B:

$$y(x) = A\cos(x\sqrt{\lambda}) + Bsen(x\sqrt{\lambda}) = -kB\cos(x\sqrt{\lambda}) + Bsen(x\sqrt{\lambda}) = B\left[sen(x\sqrt{\lambda}) - k\cos(x\sqrt{\lambda})\right]$$

Ahora normalizamos la función y obtenemos B:

$$\left\|y^2(x)\right\| = 1 \Rightarrow \int_0^a \left\{B\left[sen(x\sqrt{\lambda}) - k\cos(x\sqrt{\lambda})\right]\right\}^2 dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^2 \int_0^a \left[sen(x\sqrt{\lambda}) - k\cos(x\sqrt{\lambda})\right]^2 dx = 1$$

Cuando calculamos la integral y despejamos B obtenemos:

$$B = \pm\sqrt{\frac{4\sqrt{\lambda}}{-2k + 2a(1+k^2)\sqrt{\lambda} + 2k\cos\left(2a\sqrt{\lambda}\right) + \left(k^2 - 1\right)\mathrm{sen}\left(2a\sqrt{\lambda}\right)}}$$

Y si sustituimos k por su valor tenemos que:

$$B = \pm\sqrt{\frac{4\sqrt{\lambda}}{-2k + 2a(1+a^2\lambda)\sqrt{\lambda} + 2a\sqrt{\lambda}\cos\left(2a\sqrt{\lambda}\right) + \left(a^2\lambda - 1\right)\mathrm{sen}\left(2a\sqrt{\lambda}\right)}}$$

Por lo que nuestra función quedaría:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{4\sqrt{\lambda}}{-2k + 2a(1+a^2\lambda)\sqrt{\lambda} + 2a\sqrt{\lambda}\cos\left(2a\sqrt{\lambda}\right) + \left(a^2\lambda - 1\right)\mathrm{sen}\left(2a\sqrt{\lambda}\right)}}\left[sen(x\sqrt{\lambda}) - k\cos(x\sqrt{\lambda})\right]$$

b) ¿Existe en general solución del problema inhomogéneo

$$y''(x)+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 y(x)= f(x),\ \ y(0)+ay'(0)=y(a)-ay'(a)=0\,?$$

En caso afirmativo halla la ecuación de Green correspondiente.

Según el teorema de la alternativa de Fredholm, para nuestro caso sí existe solución para el autovalor, puesto que si el parámetro $a_2(x)$ del problema inhomogéneo no es autovalor, entonces está asegurada la solución del problema inhomogéneo.

Por tanto, para ver si existe solución,debemos ver si para los distintos λ que son solución de la ecuación homogénea del a) se puede dar la igualdad siguiente:

$$\lambda=\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

Pues bien:

Para $\lambda<0$ se ve claramente que no puede haber ningún valor, puesto que el $\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$ siempre es definido positivo.

Para $\lambda>0$ tenemos que :

$\lambda=\left(\frac{k}{a}\right)$ del apartado a) y tenemos que ver si coincide con $\lambda=\left(\frac{\pi}{a}\right)$ Por tanto hay que ver si $k=\pi$ es solución de la ecuación trascendente del apartado a) y se ve claramente que no.

Por tanto podemos asegurar, por el teorema de Fredholm que existe la solución a la función de Green

Así que calculemos la función de Green asociada.

La ecuación que queremos resolver es:

$$y''(x)+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 y(x)=0$$

Si lo identificamos con la forma operacional:

$$\left[D^2+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right]y(x)=0\Rightarrow D^2+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2=0\Rightarrow D=\sqrt{-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}=\pm i\,\frac{\pi}{a}$$

Al ser complejas conjugadas las soluciones, la solución de la ecuación es:

$$y(x)=A(\xi)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)+B(\xi)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

Y su derivada es:

$$y'(x) = \frac{\pi}{a}\left[B(\xi)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) - A(\xi)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right]$$

Si hacemos la función de Green para el intervalo entre 0 y a:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} A_1(\xi)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + B_1(\xi)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) & 0 \le x < \xi \\ A_2(\xi)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + B_2(\xi)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) & \xi \le x \le a \end{cases}$$

Las condiciones de contorno que teníamos eran:

$$\begin{cases} y(0) + ay'(0) = 0 \\ y(a) - ay'(a) = 0 \end{cases}$$

Ahora calculamos los valores de las funciones en los puntos que tenemos en las condiciones de contorno, si nos fijamos, uno de los puntos es el cero, que está solamente en la primera ecuación de la función de Green, por tanto, calculamos la función que aparece tras sustituir x por 0 en la primera ecuación de Green:

$$y_1(x) = G_1(x,\xi) = A_1(\xi)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + B_1(\xi)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$y_1(0) = A_1(\xi)\cos\left(\frac{\pi}{a}0\right) + B_1(\xi)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}0\right) = A_1(\xi)$$

Y también su derivada, porque aparece en la condición de contorno:

$$y_1(x) = G_1'(x,\xi) = \frac{\pi}{a}\left[B_1(\xi)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) - A_1(\xi)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right]$$

$$y_1'(0) = \frac{\pi}{a}\left[B_1(\xi)\cos\left(\frac{\pi}{a}0\right) - A_1(\xi)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}0\right)\right] = B_1(\xi)\frac{\pi}{a}$$

Resumiendo tenemos:

$$y_1(0) = A_1(\xi) \qquad y'(0) = B_1(\xi)\frac{\pi}{a}$$

Así que aplicando la primera condición de contorno:

$$y(0) + ay'(0) = 0 \Rightarrow y_1(0) + ay_1'(0) = 0 \Rightarrow A_1(\xi) + aB(\xi)\frac{\pi}{a} = 0 \Rightarrow A_1(\xi) = -\pi B_1(\xi)$$

Ahora introducimos este valor de la constante en la primera ecuación de Green:

$$G_1(x,\xi) = A_1(\xi)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + B_1(\xi)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) = -\pi B_1(\xi)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + B_1(\xi)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) =$$

$$= B_1(\xi)\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \pi\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right]$$

Y ahora tenemos que hacer lo mismo pero para el punto x=a así que comencemos. Calculamos el valor de la segunda ecuación de Green en el punto x=a:

$$y_2(x) = G_2(x,\xi) = A_2(\xi)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + B_2(\xi)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$y_2(a) = A_2(\xi)\cos\left(\frac{\pi}{a}a\right) + B_2(\xi)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}a\right) = A_2(\xi)\cos\pi + B_2(\xi)\mathrm{sen}\pi = -A_2(\xi)$$

Y ahora su derivada en el punto:

$$y_2'(x) = G_2'(x,\xi) = \frac{\pi}{a}\left[B_2(\xi)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) - A_2(\xi)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right]$$

$$y_2'(a) = \frac{\pi}{a}\left[B_2(\xi)\cos\left(\frac{\pi}{a}a\right) - A_2(\xi)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}a\right)\right] = \frac{\pi}{a}\left[B_2(\xi)\cos\pi - A_2(\xi)\mathrm{sen}\pi\right] = -\frac{\pi}{a}B_2(\xi)$$

Resumiendo lo anterior tenemos:

$$y_2(x) = -A_2(\xi) \qquad y_2'(x) = -\frac{\pi}{a}B_2(\xi)$$

Y ahora lo sustituimos en la condición de contorno para tener una relación entre $A_2(\xi)$ y $B_2(\xi)$:

$$y(a) - ay'(a) = 0 \Rightarrow y_2(a) - ay_2'(a) = 0 \Rightarrow -A_2(\xi) - a\left[-\frac{\pi}{a}B_2(\xi)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -A_2(\xi) + \pi B_2(\xi) = 0 \Rightarrow A_2(\xi) = \pi B_2(\xi)$$

Ahora introducimos este valor de la constante en la segunda ecuación de Green:

$$G_2(x,\xi) = A_2(\xi)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + B_2(\xi)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) = \pi B_2(\xi)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) + B_2(\xi)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) =$$

$$= B_2(\xi)\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \pi\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right]$$

Ahora la ecuación de Green nos quedaría de la siguiente manera:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} B_1(\xi)\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \pi\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right] & 0 \le x < \xi \\ B_2(\xi)\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \pi\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right] & \xi \le x \le a \end{cases}$$

Para determinar los valores de los parámetros $B_1(\xi)$ y $B_2(\xi)$ resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} G(x,\xi^+) - G(x,\xi^-) = 0 \\ G'(x,\xi^+) - G'(x,\xi^-) = \dfrac{1}{p(x)} \end{cases}$$

Pero necesitamos saber cuál es el valor de $p(x)$, para ello tenemos que hacer el siguiente cálculo:

$$p(x) = \exp\left[\int_0^x \frac{a_1(x')}{a_0(x')}dx\right]$$

Teniendo en cuenta la siguiente nomenclatura:

$$a_0(x)y''(x) + a_0(x)y'(x) + [a_0(x) - \lambda]y(x) = 0$$

En nuestro caso tenemos la ecuación $y''(x)+\lambda y(x)=0$ por lo que los valores de los coeficientes son:
$a_0(x)=1;\qquad a_1(x)=0;\qquad a_2(x)=0$

Así que haciendo el cálculo:
$$p(x)=\exp\left[\int_0^x \frac{a_1(x')}{a_0(x')}dx\right]=\exp\left[\int_0^x \frac{0}{1}dx\right]=\exp[0]=e^0=1$$

Concluimos que $p(x)=1$ así que ya podemos empezar a aplicar las condiciones para averiguar los parámetros. Ahora tenemos que aplicar las condiciones de continuidad en $x=\xi$ teniendo en cuenta que:
$$G(x,\xi^-)=B_1(\xi)\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)-\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]$$
$$G(x,\xi^+)=B_2(\xi)\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]$$

a) Para la primera condición $G(x,\xi^+)-G(x,\xi^-)=0$:
$$B_2(\xi)\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]-B_1(\xi)\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)-\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow B_2(\xi)\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)}+\pi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)}\right]-B_1(\xi)\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)}-\pi\frac{\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)}\right]=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow B_1(\xi)\left[-\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]-B_2(\xi)\left[\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]=0$$

b) Para la segunda condición $G'(x,\xi^+)-G'(x,\xi^-)=\dfrac{1}{p(x)}$:
$$G'(x,\xi^-)=\frac{d}{dx}\left\{B_1(\xi)\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)-\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]\right\}=\frac{d}{dx}\left[B_1(\xi)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)-B_1(\xi)\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]=$$
$$=B_1(\xi)\frac{\pi}{a}cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+B_1(\xi)\frac{\pi}{a}\pi\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)=B_1(\xi)\frac{\pi}{a}\left[cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+\pi\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]$$
$$G'(x,\xi^+)=\frac{d}{dx}\left\{B_2(\xi)\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]\right\}=\frac{d}{dx}\left[B_2(\xi)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+B_2(\xi)\pi\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]=$$
$$=B_2(\xi)\frac{\pi}{a}\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)-B_2(\xi)\pi\frac{\pi}{a}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)=B_2(\xi)\frac{\pi}{a}\left[\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)-\pi\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]$$

Resumiendo:
$$G'(x,\xi^-)=B_1(\xi)\frac{\pi}{a}\left[cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)+\pi\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]$$
$$G'(x,\xi^+)=B_2(\xi)\frac{\pi}{a}\left[\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)-\pi\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]$$

Apliquemos ahora la segunda condición de continuidad:

$$G'(x,\xi^{+}) - G'(x,\xi^{-}) = \frac{1}{p(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_2(\xi)\frac{\pi}{a}\left[\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) - \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right] - B_1(\xi)\frac{\pi}{a}\left[\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) + \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right] = 1$$

Con las dos condiciones de continuidad obtenemos un sistema de ecuaciones para averiguar las dos constantes, el sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} B_2(\xi)\left[\tan\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) + \pi\right] - B_1(\xi)\left[\tan\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) - \pi\right] = 0 \\ B_2(\xi)\frac{\pi}{a}\left[\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) - \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right] - B_1(\xi)\frac{\pi}{a}\left[\cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) + \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right] = 1 \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema de ecuaciones ayudados por un programa de ordenador obtendremos:

$$B_1 = \frac{a}{2\pi^2}\left[\pi \cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]$$

$$B_2 = -\frac{a}{2\pi^2}\left[\pi \cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]$$

Así, la ecuación de Green quedaría:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{a}{2\pi^2}\left[\pi \cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) - \pi \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right] & 0 \le x < \xi \\ -\frac{a}{2\pi^2}\left[\pi \cos\left(\frac{\pi}{a}\xi\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}\xi\right)\right]\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \pi \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\right] & \xi \le x \le a \end{cases}$$

Vemos que en esta ecuación se verifica que es invariante ante el cambio de x por ξ, es decir:

$$G(x,\xi) = G(\xi,x)$$