Carlos Rodríguez Fernández
Ismael Granero Maraña
Isabel María Alfonso Naranjo

PROBLEMA 10. ***TEMA 1.***

Halla todas las soluciones posibles (autofunciones) $\Psi_n(x)$ del problema de Sturm-Liouville.

$$\mathbf{y'' + 2y' + \lambda y = 0 \qquad 0 \leq x \leq 1}$$

$$\mathbf{y(0) = 0, \qquad y'(1) = 0}$$

Escribe explícitamente las tres primeras autofunciones de este problema.

En primer lugar, vamos a comparar la ecuación que se nos da en el enunciado con el modelo de ecuación de Sturm-Liouville:

Ec. S-L: $\quad p'(x)y' + p(x)y'' - s(x)y(x) + \lambda r(x)y(x) = 0 \qquad$ (I)

Ec. dada: $\quad y'' + 2y' + \lambda y = 0 \qquad$ (II)

Para que ambas resulten de la misma forma, vamos a dividir la (II) por p(x), de tal forma que vamos a obtener:

- $\frac{p'(x)}{p(x)} = 2$, e integrando $\boxed{p(x) = e^{2x}}$
- s(x)=0
- $\frac{\lambda r(x)}{p(x)} = \lambda$, de donde se obtiene claramente $\boxed{r(x) = p(x) = e^{2x}}$

Una vez realizados estos cálculos, vamos a calcular las raíces del polinomio característico:

$$s^2 + 2s + \lambda = 0 \longrightarrow \boxed{s = -1 \pm \sqrt{1-\lambda}}$$

De acuerdo con esto vamos a encontrarnos con tres posibles casos que vamos a estudiar:

- $\boxed{\lambda=1} \longrightarrow$ **<u>s=-1</u>** *RAÍZ DOBLE REAL*

Esto supone que, en este caso, la solución sea de la forma:

$$y(x) = Ae^{sx} + Bxe^{sx} = e^{-x}(A + Bx)$$

Carlos Rodríguez Fernández
Ismael Granero Maraña
Isabel María Alfonso Naranjo

- Si aplicamos ahora la 1ª condición de contorno y(0)=0:

$$0 = \mathrm{Ae}^{s\cdot 0} + \mathrm{B}\cdot 0\cdot \mathrm{e}^{s\cdot 0}$$

de donde obtenemos que **A=0**, dando lugar a:

$$\boxed{y(x) = Bx\mathrm{e}^{-x}}$$

- Ahora aplicamos la 2ª condición y'(1)=0:

$$y'(x) = -Bx\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{Be}^{-x} = \mathrm{e}^{-1}(\mathrm{B}-\mathrm{B}) = 0$$

Como (B-B)=0, deducimos que **B=nºcualquiera**. Y tomando el valor más simple, que es la unidad, obtenemos finalmente:

$$\boxed{\boldsymbol{\Psi_0(x) = x\cdot e^{-x}}}$$

- $\boxed{\lambda<1}$ ⟶ s=-1±$\sqrt{1-\lambda}$ RAÍCES REALES DISTINTAS

Con lo cual, la solución tendrá la forma:

$$\mathrm{y(x)} = \mathrm{Ae}^{s_1 x} + \mathrm{Be}^{s_2 x} = \mathrm{e}^{-x}\cdot(\mathrm{Ae}^{x\sqrt{1-\lambda}} + \mathrm{Be}^{-x\sqrt{1-\lambda}})$$

-Aplicando la 1ª condición de contorno tenemos:

$$\mathrm{e}^{-0}\cdot\left(\mathrm{Ae}^{0\sqrt{1-\lambda}} + \mathrm{Be}^{-0\sqrt{1-\lambda}}\right) = 0$$

de donde se saca que **B=-A**, por tanto:

$$\mathrm{y(x)} = \mathrm{e}^{-x}\cdot\left(\mathrm{Ae}^{x\sqrt{1-\lambda}} - \mathrm{Ae}^{-x\sqrt{1-\lambda}}\right) = A\mathrm{e}^{-x}\cdot\left(\mathrm{e}^{x\sqrt{1-\lambda}} - \mathrm{e}^{-x\sqrt{1-\lambda}}\right)$$

$$\boxed{y(x) = A\mathrm{e}^{-x}\cdot\left(2\cdot\mathrm{senh}\left(x\sqrt{1-\lambda}\right)\right) = K\mathrm{e}^{-x}\cdot\left(\mathrm{senh}\left(x\sqrt{1-\lambda}\right)\right)}$$

- Aplicando ahora la 2ª condición:

$$y'(x) = -K\mathrm{e}^{-x}\cdot\left(\mathrm{senh}\left(x\sqrt{1-\lambda}\right)\right) + K\mathrm{e}^{-x}\cdot\left(\sqrt{1-\lambda}\right)\cdot\cosh\left(x\sqrt{1-\lambda}\right)$$

Carlos Rodríguez Fernández
Ismael Granero Maraña
Isabel María Alfonso Naranjo

$$y'(x) = Ke^{-x} \cdot [(\sqrt{1-\lambda}) \cdot \cosh(x\sqrt{1-\lambda}) - \operatorname{senh}(x\sqrt{1-\lambda})]$$

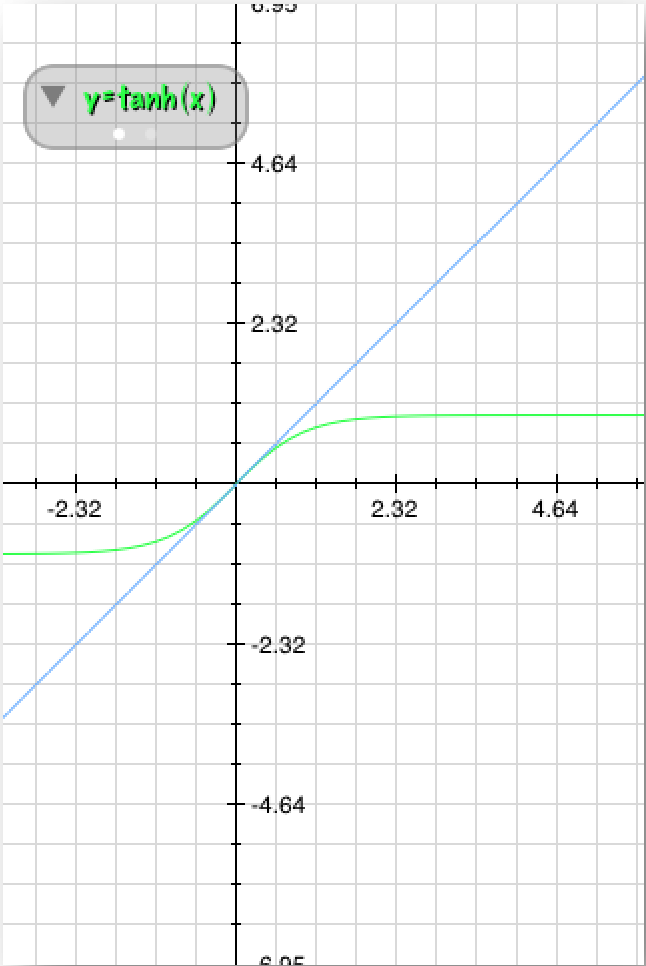
$$y'(1) = Ke^{-1} \cdot [(\sqrt{1-\lambda}) \cdot \cosh(\sqrt{1-\lambda}) - \operatorname{senh}(\sqrt{1-\lambda})] = 0$$

De aquí tenemos que la solución es la trivial trivial **K=0**, o bien:

$$[(\sqrt{1-\lambda}) \cdot \cosh(\sqrt{1-\lambda}) - \operatorname{senh}(\sqrt{1-\lambda})] = 0$$

$$\boxed{\operatorname{tgh}(\sqrt{1-\lambda}) = \sqrt{1-\lambda}}$$

Como no tiene una solución específica, podemos representarla gráficamente para ver los puntos de corte.



Vemos, que el punto de corte único que encontramos es el origen (0,0), que representa a la solución trivial. Por lo que para este caso de $\lambda<1$ <u>NO TENEMOS SOLUCIÓN.</u>

Carlos Rodríguez Fernández
Ismael Granero Maraña
Isabel María Alfonso Naranjo

- $\boxed{\lambda>1} \longrightarrow \underline{s=-1\pm i\sqrt{\lambda-1}}$ RAÍCES COMPLEJAS CONJUGADAS ($s=\propto\pm i\beta$)

Por tanto, la solución que tendremos será del tipo:

$$y(x)=Ae^{\propto x}\cos\beta x+Be^{\propto x}\operatorname{sen}\beta x=Ae^{-x}\cos(\sqrt{\lambda-1}\cdot x)+Be^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda-1}\cdot x)$$

- Aplicamos la 1ª condición de contorno:

$$Ae^{-0}\cos\left(\sqrt{\lambda-1}\cdot 0\right)+Be^{-0}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda-1}\cdot 0\right)=0$$

de donde se llega a que **A=0**. Así pues, tendremos:

$$\boxed{y(x)=Be^{-x}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda-1}\cdot x)}$$

- Aplicando después la 2ª condición:

$$y'(x)=-Be^{-x}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda-1}\cdot x\right)+\ Be^{-x}\cdot\left(\sqrt{\lambda-1}\right)\cdot\cos(\sqrt{\lambda-1}\cdot x)=$$
$$=-Be^{-1}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda-1}\cdot 1\right)+\ Be^{-1}\cdot\left(\sqrt{\lambda-1}\right)\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda-1}\cdot 1\right)=0$$

Operando, llegamos a:

$$Be^{-1}\left[\left(\sqrt{\lambda-1}\right)\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda-1}\right)-\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda-1}\right)\right]=0$$

Ahora, tenemos dos posibilidades:

1. La solución trivial **B=0**

2. $\left[\left(\sqrt{\lambda-1}\right)\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda-1}\,\cdot\right)-\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda-1}\,\cdot\right)\right]=0$

$$\left(\sqrt{\lambda-1}\right)\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda-1}\right)=\ \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda-1}\right)$$

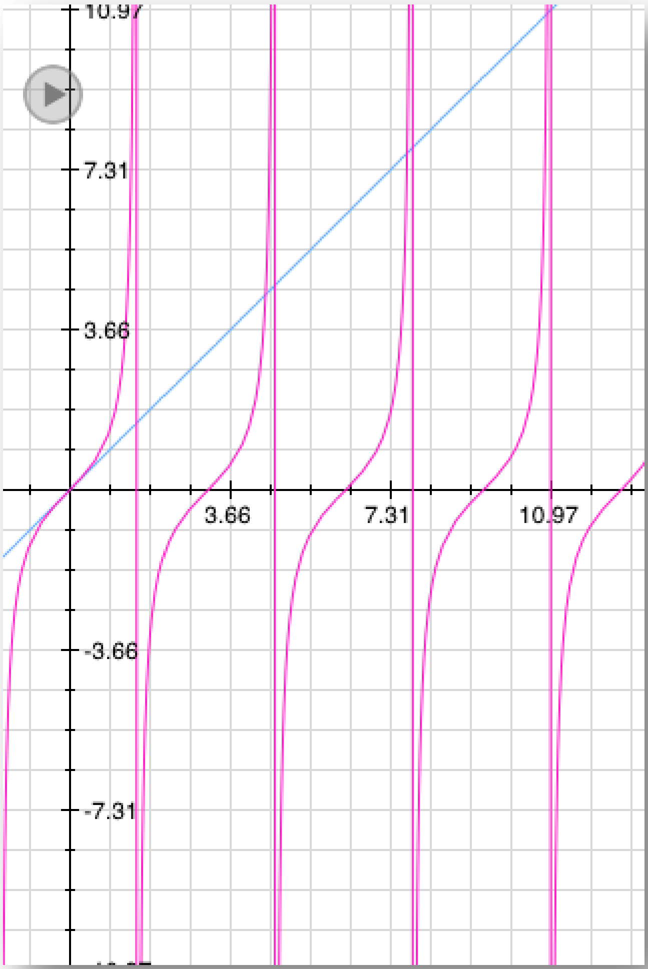
Llegando a la ecuación:

$$tg\mathrm{a}=\mathrm{a}\qquad (\mathrm{a}=\sqrt{\lambda-1})$$

Carlos Rodríguez Fernández
Ismael Granero Maraña
Isabel María Alfonso Naranjo

Como vemos que no tiene una solución determinada, podemos representarla gráficamente para ver los puntos de corte (autovalores). Así pues, obtenemos las autofunciones:

$$\boxed{\Psi_n = Be^{-x}\text{sen}(a_n x)} \quad n=1,2,3\ldots$$



Como en este caso B puede tomar cualquier valor vamos a hacer que tome el de la unidad, por sencillez. Tomando los dos primero valores de los puntos de corte, tendremos pues:

$$\boxed{\boldsymbol{\Psi_1 = e^{-x}\text{sen}(a_1 x) = e^{-x}\text{sen}(4.5)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Psi_2 = e^{-x}\text{sen}(a_2 x) = e^{-x}\text{sen}(7.7)}}$$

Carlos Rodríguez Fernández
Ismael Granero Maraña
Isabel María Alfonso Naranjo

Vamos pues a recopilar todas las soluciones, obteniendo finalmente las tres soluciones que se nos piden en el enunciado:

$$\boxed{\boldsymbol{\Psi_0(x) = x \cdot e^{-x}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Psi_1 = e^{-x}sen(a_1x) = e^{-x}sen(4.5)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Psi_2 = e^{-x}sen(a_2x) = e^{-x}sen(7.7)}}$$