CARLOS MIGUEL ÁLVAREZ GONZALEZ

JESÚS MIGUEL SIMÓN MARTÍN

SANTOS ZAMBRANO AGUDO

12.-Sea el problema no homogéneo y''= f(x), 0 ≤ x ≤ L, y(0)=y'(L)=0.

a) Encuentra las autofunciones normalizadas del operador $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ para las condiciones de contorno dadas.

Para encontrar las autofunciones del operador derivada segunda resolvemos la ecuación siguiente

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} = -\lambda_n \varphi_n$$

El tipo de raíces que encontremos depende del signo de λ_n, por lo que veremos todos los casos.

Caso $\lambda_n = 0$

En este caso tenemos que $\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} = -\lambda_n \varphi_n = 0$. Integrando obtenemos φ_n:

$$\frac{\partial\ \varphi_n}{\partial x} = \int 0 dx = cte \equiv A$$
$$\varphi_n = \int A dx = Ax + B$$

Aplicamos las condiciones de contorno:

$$\varphi_n(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\varphi_n'(L) = A\big|_{x=L} = 0 \Rightarrow A = 0$$

Llegamos de este modo a la solución trivial A=B=0.

Caso λ_n <0

Si $-\lambda_n$ >0 la solución será del tipo exponencial

$$\varphi_n(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda_n}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda_n}x}$$

Aplicamos las condiciones de contorno:

$$\varphi_n(0) = 0 \Rightarrow Ae^0 + Be^0 = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$\varphi_n'(L) = A\sqrt{-\lambda_n}e^{\sqrt{-\lambda_n}x} - B\sqrt{-\lambda_n}e^{-\sqrt{-\lambda_n}x}\ \big|_{x=L} = A(\sqrt{-\lambda_n}e^{\sqrt{-\lambda_n}x} + \sqrt{-\lambda_n}e^{-\sqrt{-\lambda_n}x})\big|_{x=L} = 0$$

La única manera de que esto sea cero es que sea A = 0:

$$\Rightarrow A = B = 0$$

Llegamos nuevamente a la solución trivial.

Caso λ_n >0

Si $-\lambda_n$ >0 las raíces serán complejas y la solución vendrá dada por una combinación de funciones trigonométricas:

$$\varphi_n(x) = A\cos\sqrt{\lambda_n}x + B\sin\sqrt{\lambda_n}x$$

Aplicamos las condiciones de contorno:

$$\varphi_n(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\varphi_n'(L) = B\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x\ \big|_{x=L} = 0$$

Para que esta condición sea cero debe ser $\cos\sqrt{\lambda_n}L$ sea cero,ya que las otras dos alternativas nos conducirían a la solución trivial.

$$\cos\sqrt{\lambda_n}L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_n}L = (2n+1)\frac{\Pi}{2} \Rightarrow \sqrt{\lambda_n} = (2n+1)\frac{\Pi}{2L}$$

Ahora obtendremos el valor de B que normaliza las autofunciones obtenidas.Para ello

$$\left\|\varphi_n^2\right\| = 1$$

$$1 = \int_0^L \varphi_n\varphi_n dx = B^2\int_0^L \sin^2\sqrt{\lambda_n}x dx = B^2\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n}x}{4\sqrt{\lambda_n}}\right]_0^L = B^2\left[\frac{L}{2} - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n}L}{4\sqrt{\lambda_n}}\right]$$

Nuestro propósito es hallar la constante de normalización para ello despejamos B:

$$B = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n}L}{4\sqrt{\lambda_n}}\right)}}$$

Sustituyendo la expresión obtenida para los autovalores:

$$B = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - \frac{\sin(2(2n+1)\frac{\Pi}{2})}{4(2n+1)\frac{\Pi}{2L}}\right)}}$$

Desarrollando el seno tenemos:

$$\sin 2(2n+1)\frac{\pi}{2} = \sin(2n+1)\pi = \sin 2n\pi\cos\pi + \cos 2n\pi\sin\pi = 0$$

Vemos que el desarrollo se anula por tanto, nos queda:

$$B = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Ya tenemos el valor de la autofunción,que es:

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{L}}}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}x$$

b)Escribe la función de Green G(x,x´)mediante desarrollo en serie.

El desarrollo lo obtenemos sustituyendo en la expresión siguiente el valor obtenido para las autofunciones (las cuales ya están normalizadas):

$$G(x, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n(\boldsymbol{\xi})\mathrm{y_n}(\mathbf{x})}{\lambda - \lambda_n}$$

Sustituimos tomando para λ el valor cero y el resultado es el siguiente:

$$G(x, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{2}{L}\sin(\frac{2n+1\Pi}{L\quad 2}x)\sin(\frac{2n+1\Pi}{L\quad 2}\xi)}{-\frac{(2n+1)^2}{4L^2}\Pi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-8L}{\Pi^2}\frac{\sin(\frac{2n+1\Pi}{L\quad 2}X)\sin(\frac{2n+1\Pi}{L\quad 2}\xi)}{(2n+1)^2}$$

El desarrollo en serie de la función de Green es:

$$\mathbf{G(x, \boldsymbol{\xi}) = \frac{-8L}{\Pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(\frac{2n+1\Pi}{L\quad 2}x)\sin(\frac{2n+1\Pi}{L\quad 2}\xi)}{(2n+1)^2}}$$

c) Obtén G(x, ξ) en forma cerrada.

Sea la ecuación diferencial se Sturm-Liouville no homogénea:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

Donde $0 \le x \le L$, $y(0) = y'(L) = 0$. Calculemos la función de Green de este problema. La solución general de la homogénea:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Será:

$$y(x) = A + B(x)$$

$y_1(x) = A_1 + B_1x$ es la solución que satisface la condición de contorno en $x=0$:

$y_1(0)=0 \Rightarrow A_1+B_1x = 0 \Rightarrow A_1=0$

$y_2(x) = A_2+B_2x$ es la solución que satisface la condición de contorno en $x=L$:

$y_2'(L)=0 \Rightarrow B_2=0$

Por lo tanto, la función de Green será:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} C_1(\xi)x, & 0 \leq x < \xi \\ C_2(\xi)\ , & 0 < x \leq \xi \end{cases}$$

Aplicando las condiciones de continuidad de G en ξ y de discontinuidad de G' en ξ, podremos calcular C_1 y C_2:

$$C_1(\xi)\xi - C_2(\xi) = 0$$

$$-C_1(\xi) = \frac{1}{P(\xi)}$$

En nuestro caso $P(x)=1$, por lo tanto:

$$C_1(\xi)\xi - C_2(\xi) = 0$$

$$-C_1(\xi) = 1$$

Resolviendo el sistema tenemos:

$$C_1=-1 \quad C_2(\xi)=-\xi$$

Por lo tanto, nuestra función de Green será:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -x & 0 \leq x \leq \xi \\ -\xi & \xi \leq x \leq L \end{cases}$$

d) Encontrar la solución del problema para el caso particular f(x) = x^2 con L = 1.

Para este caso, aplicamos la siguiente fórmula:

$$y(x) = \int_0^L G(x,\xi) f(\boldsymbol{\xi})\, d\xi$$

Por tanto nos queda:

$$y(x) = \int_0^L G(x,\xi) \xi^2\, d\xi$$

Dividimos la integral en dos:

$$y(x) = \int_0^x -\xi\xi^2 d\xi + \int_x^L -x\xi^2 d\xi = -\frac{\xi^4}{4}\Big|_0^x - x\frac{\xi^3}{3}\Big|_x^L =$$

$$= -\left(\frac{x^4}{4}\right) - x\left(\frac{L^3}{3} - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^4 - 4xL^3}{12}$$

En el caso de que L sea igual a 1, tendremos.

$$y(x) = \frac{x^4 - 4x}{12} = \frac{x}{12}(x^3 - 4)$$