Métodos de la Física Matemática (2010/2011)

Mª del Rocío Calero Fernández-Cortés
Leticia Jaén Tapia
María Jesús Jiménez Donaire

Ejercicio 16.- Sea la ecuación de Sturm-Liouville no homogénea

$$y''-m^2y=f(x),\quad 0\le x\le 1,\quad y(0)+y'(0)=0,\quad y(1)=0$$

donde $m>0$. Se pide hallar la función de Green correspondiente en forma de desarrollo en serie de auto funciones.

Identificamos cada término de la ecuación según el problema in homogéneo de Sturm-Liouville,

$$\mathrm{L}=\frac{d^2}{dx^2},\quad p(x)=1,\ \ s(x)=0,\ \ r(x)=1,\ \ \lambda=-m^2$$

Para hallar los autovalores y auto funciones del operador L de Sturm-Liouville resolvemos el problema:

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi_n(x)=-\lambda_n\cdot\psi_n(x)$$

estudiando las distintas soluciones según los valores que tome λ_n.

- Si $\boxed{\lambda_n=0}$ obtenemos la ecuación diferencial siguiente,

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi_n(x)=0\Rightarrow\psi_n(x)=A+Bx$$

Las auto funciones del operador son líneas rectas. Aplicamos las condiciones de contorno para determinar las constantes.

1. $\psi_n(0)+\psi_n'(0)=0\Rightarrow A+B=0\Rightarrow A=-B$
2. $\psi_n(1)=0\Rightarrow A+B=0\Rightarrow A=-B$

Por tanto obtenemos que las auto funciones son de la forma:

$$\boxed{\psi_n(x)=A+Ax=A\left(1-x\right)}$$

- Si $\boxed{\lambda_n < 0}$ las raíces del polinomio característico son $\pm\sqrt{-\lambda_n}$, y por tanto la solución de la ecuación diferencial es una combinación lineal de las funciones hiperbólicas:

$$\psi_n(x) = A\sinh\left(\sqrt{-\lambda_n}x\right) + B\cosh\left(\sqrt{-\lambda_n}x\right)$$

Aplicamos las condiciones de contorno

1. $\psi_n(0) + \psi_n{}'(0) = 0 \Rightarrow B + A\sqrt{-\lambda_n} = 0 \Rightarrow B = -A\sqrt{-\lambda_n}$

2. $\psi_n(1) = 0 \Rightarrow A\sinh\left(\sqrt{-\lambda_n}\right) + B\cosh\left(\sqrt{-\lambda_n}\right) = 0$

$$A = -B\frac{\cosh\left(\sqrt{-\lambda_n}\right)}{\sinh\left(\sqrt{-\lambda_n}\right)} = A\sqrt{-\lambda_n}\,\frac{\cosh\left(\sqrt{-\lambda_n}\right)}{\sinh\left(\sqrt{-\lambda_n}\right)}$$

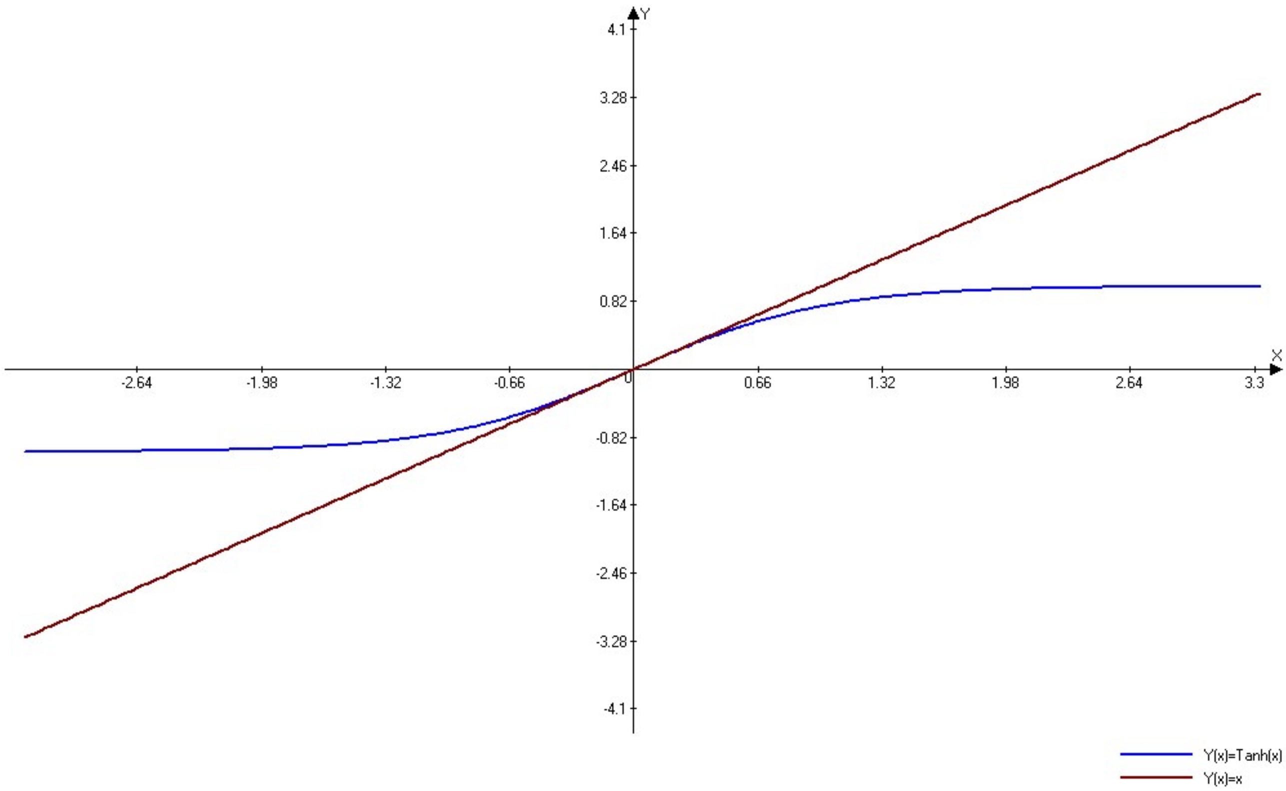
$$\boxed{\tanh\sqrt{-\lambda_n} = \sqrt{-\lambda_n}}$$

Obtenemos una ecuación trascendente. Para saber si esta solución es la que buscamos o no, hallamos el determinante de los coeficientes.

$$\begin{vmatrix} \sqrt{-\lambda_n} & 1 \\ \sinh\sqrt{-\lambda_n} & \cosh\sqrt{-\lambda_n} \end{vmatrix} = \sqrt{-\lambda_n}\cdot\cosh\sqrt{-\lambda_n} - \sinh\sqrt{-\lambda_n}$$

Para obtener una solución distinta de la trivial el determinante de los coeficientes debe ser nulo. Sin embargo al igualar a cero obtenemos que a menos que $\lambda_n = 0$ esto no es posible.

Si lo representamos gráficamente podemos comprobar que efectivamente la única solución posible es la trivial.



Por tanto rechazamos esta solución cuando $\lambda_n < 0$

- Si $\boxed{\lambda_n > 0}$ las raíces del polinomio característico,

$$\left(D^2 + \lambda_n\right)\psi_n(x) = 0 \Rightarrow D = \pm i\sqrt{\lambda_n}$$

y por tanto las auto funciones del operador L serán una combinación lineal de senos y cosenos,

$$\psi_n(x) = A\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right) + B\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)$$

Aplicamos ahora las condiciones de contorno para hallar los autovalores del operador y las constantes.

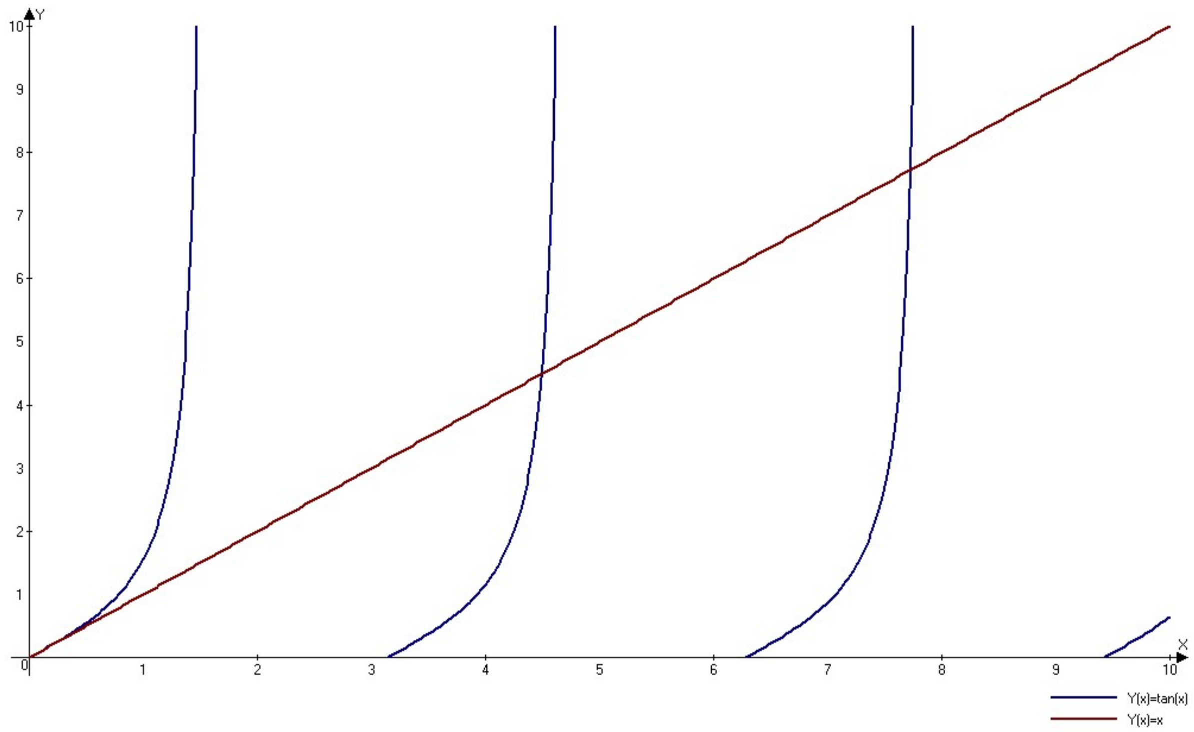
1. $\psi_n(0) + \psi_n'(0) = 0$; donde $\psi_n(0) = B$ y $\psi_n'(0) = A\sqrt{\lambda_n}$, por tanto obtenemos la condición $B = -A\sqrt{\lambda_n}$

2. $\psi_n(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad A\sin\sqrt{\lambda_n} + B\cos\sqrt{\lambda_n} = 0 \Rightarrow A\left(\sin\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}\right) = 0$

Podemos ver que la opción A = 0 no es posible, porque B también lo sería y por tanto sólo obtendríamos la solución trivial, luego:

$$\sin\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n}$$

Encontramos que los valores de λ_n que verifican esta ecuación trascendente son los propios autovalores del operador de Sturm-Liouville. La siguiente gráfica nos muestra los valores para los cuales existe solución distinta de la trivial.



Podemos ver que las intersecciones se encuentran en $\lambda_n = 0,\ 4.48,\ 7.76...$

Vemos que el caso de $\lambda_0 = 0$ es justamente el que está recogido en el primer apartado de nuestro problema y por ello no lo incluiremos en esta solución.

Finalmente hemos encontrado una solución distinta de la trivial para los casos:

1. $\boxed{\lambda_0 = 0}$, donde las auto funciones son de la forma $\boxed{\psi_0(x) = A(1-x)}$

2. $\boxed{\lambda_n \succ 0}$, donde las auto funciones $\boxed{\psi_n(x) = B\left\{\sin\sqrt{\lambda_n}x - \sqrt{\lambda_n}\cdot\cos\sqrt{\lambda_n}x\right\}}$, para n = 1,2,… (*)

(*) Hemos llamado de forma diferente a las constantes simplemente por mantener un orden en la nomenclatura.

Para poder utilizar la fórmula bilineal del desarrollo en serie de la función de Green, tenemos que normalizar previamente las auto funciones obtenidas:

$$G(x,\xi) = \sum_n \frac{\psi_n(x)\cdot\psi_n^*(\xi)}{\lambda-\lambda_n}$$

1. Normalizamos en el primer caso,

$$\int_0^1 dx\cdot\|\psi_n\|^2 = 1 \Rightarrow A^2\int_0^1 dx\cdot(1-x)^2 = A^2\left[\frac{x^3}{3}+x-x^2\right]_0^1 = 1$$

$$\boxed{A^2\cdot\frac{1}{3} = 1 \Rightarrow A = \pm\sqrt{3}}$$

2. Normalizamos en el segundo caso,

$$\int_0^1 dx\cdot\|\psi_n\|^2 = B^2\left[\int_0^1 dx\cdot\sin^2\sqrt{\lambda_n}x+\lambda_n\int_0^1 dx\cdot\cos^2\sqrt{\lambda_n}x-2\sqrt{\lambda_n}\int_0^1 dx\cdot\sin\sqrt{\lambda_n}x\cdot\cos\sqrt{\lambda_n}x\right]$$

$$B^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n}}{4\sqrt{\lambda_n}}\right)_0^1+B^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2\sqrt{\lambda_n}}{4\sqrt{\lambda_n}}\right)_0^1-2\sqrt{\lambda_n}B^2\left(\frac{\sin^2\sqrt{\lambda_n}}{2\sqrt{\lambda_n}}\right)_0^1 = 1$$

$$B^2\left(1-\sin^2\sqrt{\lambda_n}\right) = B^2\cos^2\sqrt{\lambda_n} = 1$$

$$\boxed{B = \pm\frac{1}{\cos\sqrt{\lambda_n}}}$$

La función de Green para cada autofunción ψ_n, con su correspondiente autovalor λ_n asociado, viene dada por:

$$G(x,\xi) = \sum_n \frac{\psi_n(x)\cdot\psi_n^*(\xi)}{\lambda-\lambda_n}$$

Sustituyendo para cada λ_n considerado, obtenemos:

1. Para $\lambda_n > 0$

$$G(x,\xi) = \sum_{n=1}\frac{1}{\cos^2\sqrt{\lambda_n}}\frac{(\sin\sqrt{\lambda_n}x-\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x)(\sin\sqrt{\lambda_n}\xi-\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}\xi)}{-m^2-\lambda_n} =$$

$$G(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\cos^2\sqrt{\lambda_n}}\frac{(\sin\sqrt{\lambda_n}x-\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x)(\sin\sqrt{\lambda_n}\xi-\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}\xi)}{m^2+\lambda_n}$$

2. Para $\lambda_n=0$

$$G(x,\xi)=\sum_{n=0}\frac{\sqrt{3}(1-x)\sqrt{3}(1-\xi)}{-m^2}=3\cdot\frac{(1-x)(1-\xi)}{-m^2}$$

Por tanto podemos concluir que la función de Green asociada al problema original en serie de auto funciones es,

$$\boxed{G(x,\xi)=3\cdot\frac{(1-x)(1-\xi)}{-m^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\cos^2\sqrt{\lambda_n}}\frac{(\sin\sqrt{\lambda_n}x-\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x)(\sin\sqrt{\lambda_n}\xi-\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}\xi)}{m^2+\lambda_n}}$$