Javier Mellado Cano Juan Manuel Izaguirre Arroyo Jorge Lozano Cerrato

Problema 5

a) Halla la ecuación transcendente que determina los autovalores λ_n y obtén las autofunciones $\psi_n(x)$ del problema de Sturm-Liouville definido por la ecuación diferencial y''(x) = -λ_ny(x) en el intervalo 0 ≤ x ≤ a con las condiciones de contorno y(0) + ay'(0) = 0, y(a) – ay'(a) = 0.

b) ¿Existe, en general, solución del problema inhomogéneo

$$y'' + (\pi/a)^2 y = f(x), \qquad y(0) + ay'(0) = y(a) - ay'(0) = 0?$$

En caso afirmativo, halla la función de Green correspondiente.

a) Comparando con la ecuación de Sturm-Liouville identificamos el operador $\mathscr{L}$, y cada función:

La ecuación diferencial del problema es y''(x) = -λ_n y(x)

La ecuación de Sturm-Liouville es:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right]+q(x)\,y(x)+\lambda\,r(x)\,y(x)=0$$

Comparando las dos ecuaciones podemos identificar las funciones y el operador $\mathscr{L}$:

$\mathscr{L}$ = y'' r(x) = 1 p(x) = 1 q(x) = 0

Estudiamos las siguientes situaciones que se nos presentan para λ :

1. Caso λ_n = 0.Entonces y'' = 0

   Resolviendo la ecuación diferencial llegamos a la ecuación de la recta: y(x) = A + Bx, cuya derivada es y'(x) = B.

   Imponiendo las condiciones de contorno:

$$y(0) + ay'(0) = 0$$

$$y(a) - ay'(a) = 0$$

   Llegamos a:

$$A + aB = 0$$

$$A + aB - aB = 0$$

   Despejando A y B se obtiene:

$$A = 0 \qquad B = 0$$

   Entonces λ = 0 **no** es autovalor porque sólo proporciona la solución trivial.

2. Caso λ_n < 0 ➔ -λ_n > 0. La solución de la ecuación diferencial y''(x) = -λ y(x) es:

$$y(x)=Ae^{x\sqrt{-\lambda}}+Be^{-x\sqrt{-\lambda}}$$

   Y la derivada es:

$$y'(x)=\sqrt{-\lambda}\,A\,e^{x\sqrt{-\lambda}}-\sqrt{-\lambda}\,B\,e^{-x\sqrt{-\lambda}}$$

Aplicando las condiciones de contorno:

y(0) + ay'(0) = 0 → $B+A+aA\sqrt{-\lambda}-a\sqrt{-\lambda}B=0$

y (a) – ay'(a) = 0 → $Ae^{a\sqrt{-\lambda}}+Be^{-a\sqrt{-\lambda}}-a\sqrt{-\lambda}Ae^{a\sqrt{-\lambda}}+a\sqrt{-\lambda}Be^{-a\sqrt{-\lambda}}=0$

Llegamos a:

$$A(1+a\sqrt{-\lambda})+B(1-a\sqrt{-\lambda})=0$$
$$A(e^{a\sqrt{-\lambda}}-a\sqrt{-\lambda}e^{a\sqrt{-\lambda}})+B(e^{-a\sqrt{-\lambda}}+a\sqrt{-\lambda}e^{-a\sqrt{-\lambda}})=0$$

En forma matricial:

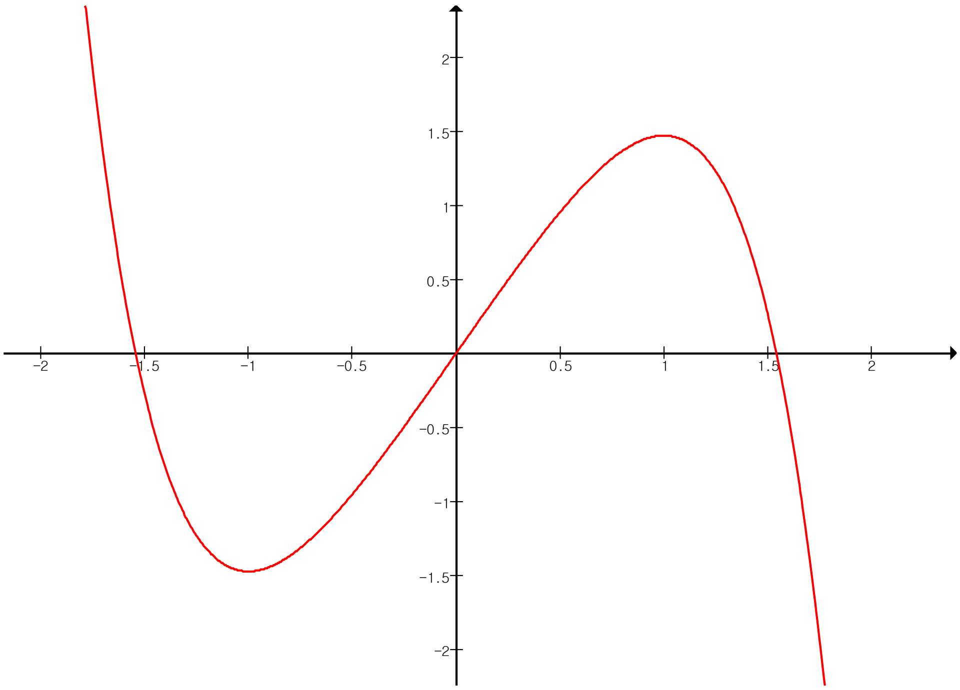
$$\begin{pmatrix} 1+a\sqrt{-\lambda} & 1-a\sqrt{-\lambda} \\ e^{a\sqrt{-\lambda}}-a\sqrt{-\lambda}e^{a\sqrt{-\lambda}} & e^{-a\sqrt{-\lambda}}+a\sqrt{-\lambda}e^{-a\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para ver si $a\sqrt{-\lambda}$ nos lleva a algún autovalor analizamos el determinante de coeficientes. Si vale cero existirán autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1+a\sqrt{-\lambda} & 1-a\sqrt{-\lambda} \\ e^{a\sqrt{-\lambda}}(1-a\sqrt{-\lambda}) & e^{-a\sqrt{-\lambda}}(1+a\sqrt{-\lambda}) \end{vmatrix}=0$$
$$(1+a\sqrt{-\lambda})^2e^{-a\sqrt{-\lambda}}-(1-a\sqrt{-\lambda})^2e^{a\sqrt{-\lambda}}=0$$

Esto sólo se puede resolver gráficamente con un programa o con un método numérico, pero no analíticamente. Por comodidad hacemos el cambio $t=a\sqrt{-\lambda}$

$$(1+t)^2e^{-t}-(1-t)^2e^{t}=0$$



Se puede ver que existen valores de t que anulan el determinante. El caso 0 ya está descartado de antes. Los valores son: $t_0=0$ $t_1=-1{,}5434046$ $t_2=1{,}5434046$.

$$\lambda=\frac{t^2}{a^2}$$

Entonces existe solución al problema para $\lambda < 0$. Las autofunciones asociadas serán:

$$\psi_n(x) = A e^{x\sqrt{-\lambda_n}} + B e^{-x\sqrt{-\lambda_n}}$$

Podemos intentar calcular los valores de A y B mediante las condiciones de contorno. Tenemos tres constantes y dos condiciones de contorno que nos permitirían en principio poner A y B en función de a, pero las condiciones de contorno son combinación lineal entre sí, por tanto las autofunciones quedarán en función de a y B.

De la primera condición:

$$A = -B\frac{1 - a\sqrt{-\lambda}}{1 + a\sqrt{-\lambda}}$$

Entonces las autofunciones pueden expresarse:

$$\psi_n(x) = -B\frac{1 - a\sqrt{-\lambda_n}}{1 + a\sqrt{-\lambda_n}} e^{x\sqrt{-\lambda_n}} + B e^{-x\sqrt{-\lambda_n}}$$

3. Caso $\lambda_n > 0 \rightarrow -\lambda_n < 0$. La solución de la ecuación diferencial y''(x) = -λ y(x) es:

$$y(x) = A e^{x\sqrt{-\lambda}} + B e^{-x\sqrt{-\lambda}}$$
$$y(x) = A e^{ix\sqrt{\lambda}} + B e^{-ix\sqrt{\lambda}}$$

Pasando a forma trigonométrica:

$$y(x) = A' \, sen\sqrt{\lambda}\, x + B' \cos\sqrt{\lambda}\, x$$

NOTA: Por conveniencia llamaremos a las constantes A' = A y B' = B.

$$y(x) = A \, sen\sqrt{\lambda}\, x + B\cos\sqrt{\lambda}\, x$$

La derivada será:

$$y'(x) = A\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\, x - B\sqrt{\lambda}\, sen\sqrt{\lambda}\, x$$

Mediante las condiciones de contorno obtenemos el siguiente sistema:

y(0) + ay'(0) = 0 → $B + aA\sqrt{\lambda} = 0$

y (a) – ay'(a) = 0 → $A(sen\, a\sqrt{\lambda} - a\sqrt{\lambda}\cos a\sqrt{\lambda}) + B(\cos a\sqrt{\lambda} + a\sqrt{\lambda}\, sen\, a\sqrt{\lambda})$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a\sqrt{\lambda} & 1 \\ sen\, a\sqrt{\lambda} - a\sqrt{\lambda}\cos a\sqrt{\lambda} & \cos a\sqrt{\lambda} + a\sqrt{\lambda}\, sen\, a\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} a\sqrt{\lambda} & 1 \\ sen\, a\sqrt{\lambda} - a\sqrt{\lambda}\cos a\sqrt{\lambda} & \cos a\sqrt{\lambda} + a\sqrt{\lambda}\, sen\, a\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

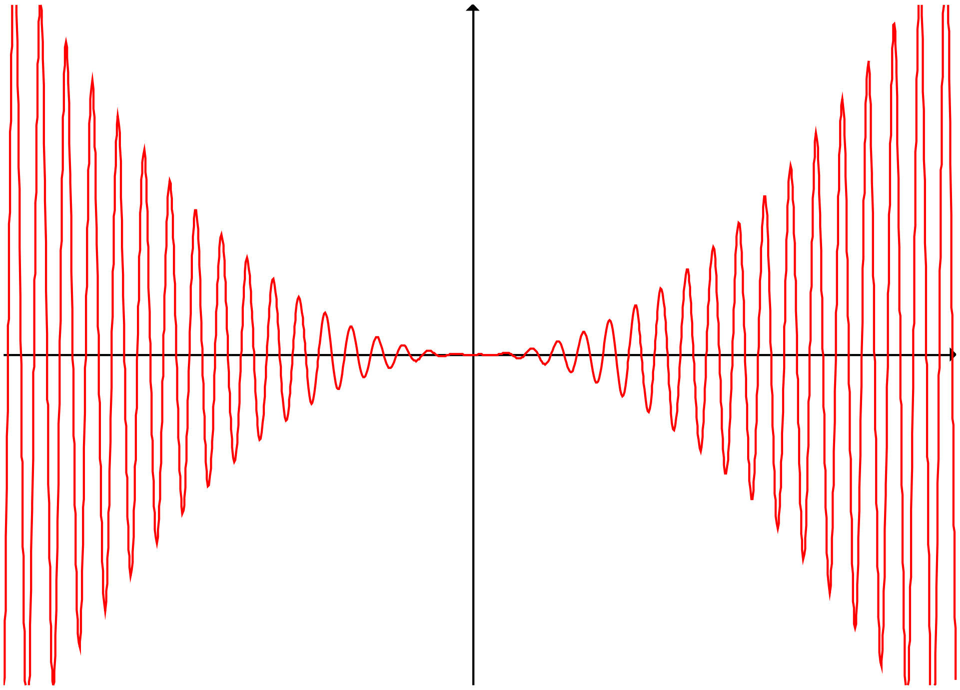
$$a\sqrt{\lambda}\cos a\sqrt{\lambda} + (a\sqrt{\lambda})^2 sen\, a\sqrt{\lambda} - sen\, a\sqrt{\lambda} + a\sqrt{\lambda}\cos a\sqrt{\lambda} = 0$$

$$sen(a\sqrt{\lambda})[(a\sqrt{\lambda})^2 - 1] + 2a\sqrt{\lambda}\cos a\sqrt{\lambda} = 0$$

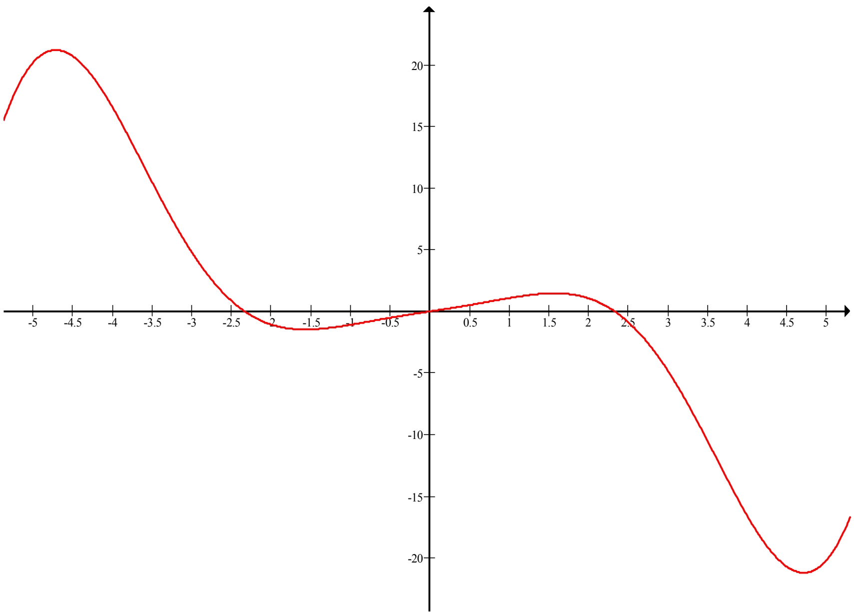
Haciendo el cambio $a\sqrt{\lambda} = t$

$$\tan t = \frac{-2\mathrm{t}}{t^2 - 1}$$

Gráficamente podemos ver que presenta infinitas soluciones, por lo que habrá infinitos autovalores:



Ampliamos el origen de coordenadas y calculamos las tres primeras:



Los valores encontrados son: $t_0 = 0$ $t_1 = -2{,}33112$ $t_2 = 2{,}33112$

Luego existen soluciones para $\lambda > 0$.

Las autofunciones asociadas son:

$$\psi_n(x) = A\,sen\sqrt{\lambda_n}x + B\cos\sqrt{\lambda_n}\,x$$

b) El teorema de la alternativa de Fredholm nos dice que si $\mu \neq \lambda n$, entonces el problema inhomogéneo tendrá solución única. En nuestro caso buscamos las soluciones de λ siempre que sean positivas porque $(\pi/a)^2$ es mayor que cero. Comprobamos si hay algún t = π en la gráfica anterior y vemos que ningún t pasa por π. Luego sí podremos encontrar la función de Green. Para hallar la función de Green la aplicamos al problema:

$$\frac{d^2}{dx^2}[G(x,\xi)]+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 G(x,\xi)=\delta(x-\xi)$$

La cual es una ecuación diferencial homogénea excepto en el punto x = ξ. La ecuación diferencial que queremos resolver es:

$$y''(x)+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 y(x)=0$$

Cuya solución es:

$$y(x)=Ae^{ix\frac{\pi}{a}}+Be^{-ix\frac{\pi}{a}}=A\cos\frac{\pi}{a}x+B\,sen\frac{\pi}{a}x$$

La función de Green es:

$$G(x,\xi)\begin{cases} A\cos\frac{\pi}{a}x+B\,sen\frac{\pi}{a}x & 0\leqslant x<\xi \\ C\cos\frac{\pi}{a}x+D\,sen\frac{\pi}{a}x & \xi<x\leqslant a \end{cases}$$

La diferencial de la función de Green es:

$$G'(x,\xi)\begin{cases} -\frac{\pi}{a}A\,sen\frac{\pi}{a}x+\frac{\pi}{a}B\cos\frac{\pi}{a}x & 0\leqslant x<\xi \\ -\frac{\pi}{a}C\,sen\frac{\pi}{a}x+\frac{\pi}{a}D\cos\frac{\pi}{a}x & \xi<x\leqslant a \end{cases}$$

La primera condición de contorno se aplica al caso 0 ≤ x < ξ:

y(0) + ay'(0) = 0 → A + a(π/a) B = 0 → A = - πB

La segunda condición de contorno se aplica al caso ξ < x ≤ a:

y(a) – ay'(a) = 0 → - C + a(π/a)D = 0 → C = πD

Estudiamos la continuidad en ξ:

$$-\pi B\cos\frac{\pi}{a}\xi+B\,sen\frac{\pi}{a}\xi=\pi D\cos\frac{\pi}{a}\xi+D\,sen\frac{\pi}{a}\xi$$

Salto en la derivada:

$$-\frac{\pi}{a}(\pi D)\,sen\frac{\pi}{a}\xi+\frac{\pi}{a}D\cos\frac{\pi}{a}\xi+\frac{\pi}{a}(-\pi B)\,sen\frac{\pi}{a}\xi-\frac{\pi}{a}B\cos\frac{\pi}{a}\xi=1$$

El sistema de ecuaciones resultante es el siguiente:

$$B\left(-\pi\cos\frac{\pi}{a}\xi+sen\frac{\pi}{a}\xi\right)-D\left(\pi\cos\frac{\pi}{a}\xi+sen\frac{\pi}{a}\xi\right)=0$$

$$-B\left(\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi}{a}\xi+\frac{\pi^2}{a}sen\frac{\pi}{a}\xi\right)+D\left(-\frac{\pi^2}{a}sen\frac{\pi}{a}\xi+\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi}{a}\xi\right)=1$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} sen\frac{\pi}{a}\xi-\pi\cos\frac{\pi}{a}\xi & -\pi\cos\frac{\pi}{a}\xi-sen\frac{\pi}{a}\xi \\ -\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi}{a}\xi-\frac{\pi^2}{a}sen\frac{\pi}{a}\xi & -\frac{\pi^2}{a}sen\frac{\pi}{a}\xi+\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi}{a}\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} sen\frac{\pi}{a}\xi-\pi\cos\frac{\pi}{a}\xi & -\pi\cos\frac{\pi}{a}\xi-sen\frac{\pi}{a}\xi \\ -\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi}{a}\xi-\frac{\pi^2}{a}sen\frac{\pi}{a}\xi & -\frac{\pi^2}{a}sen\frac{\pi}{a}\xi+\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi}{a}\xi \end{vmatrix}=-\frac{\pi^2}{a}sen^2\frac{\pi}{a}\xi+\frac{\pi}{a}sen\frac{\pi}{a}\xi\cos\frac{\pi}{a}\xi$$

$$+\frac{\pi^3}{a}sen\frac{\pi}{a}\xi\cos\frac{\pi}{a}\xi-\frac{\pi^2}{a}\cos^2\frac{\pi}{a}\xi-\frac{\pi}{a}sen\frac{\pi}{a}\xi\cos\frac{\pi}{a}\xi-\frac{\pi^2}{a}\cos^2\frac{\pi}{a}\xi-\frac{\pi^2}{a}sen^2\frac{\pi}{a}\xi$$

$$-\frac{\pi^3}{a}\cos\frac{\pi}{a}\xi\, sen\frac{\pi}{a}\xi=-\frac{\pi^2}{a}-\frac{\pi^2}{a}=\frac{-2\pi^2}{a}\neq 0$$

Resolvemos por Cramer B y D:

$$B=\frac{sen\frac{\pi}{a}\xi+\pi\cos\frac{\pi}{a}\xi}{\frac{-2\pi^2}{a}}=\frac{-a}{2\pi^2}\left[sen\frac{\pi}{a}\xi+\pi\cos\frac{\pi}{a}\xi\right]$$

$$D=\frac{sen\frac{\pi}{a}\xi-\pi\cos\frac{\pi}{a}\xi}{\frac{-2\pi^2}{a}}=\frac{-a}{2\pi^2}\left[sen\frac{\pi}{a}\xi-\pi\cos\frac{\pi}{a}\xi\right]$$

Sustituimos:

$$G_1(x,\xi)=(-\pi)\frac{-a}{2\pi^2}\left[sen\frac{\pi}{a}\xi+\pi\cos\frac{\pi}{a}\xi\right]\cos\frac{\pi}{a}x-\frac{a}{2\pi^2}\left[sen\frac{\pi}{a}\xi+\pi\cos\frac{\pi}{a}\xi\right]sen\frac{\pi}{a}x \quad 0\leqslant x\leqslant\xi$$

$$G_2(x,\xi)=\pi\left(\frac{-a}{2\pi^2}\right)\left[sen\frac{\pi}{a}\xi-\pi\cos\frac{\pi}{a}\xi\right]\cos\frac{\pi}{a}x-\frac{a}{2\pi^2}\left[sen\frac{\pi}{a}\xi-\pi\cos\frac{\pi}{a}\xi\right]sen\frac{\pi}{a}x \quad \xi\leqslant x\leqslant a$$

Reagrupando:

$$G \begin{cases} G_1(x,\xi) = \dfrac{-a}{2\pi^2}\left[sen\dfrac{\pi}{a}\xi + \pi\cos\dfrac{\pi}{a}\xi\right]\left[sen\dfrac{\pi}{a}x - \pi\cos\dfrac{\pi}{a}x\right] & 0 \leqslant x \leqslant \xi \\ G_2(x,\xi) = \dfrac{-a}{2\pi^2}\left[sen\dfrac{\pi}{a}\xi - \pi\cos\dfrac{\pi}{a}\xi\right]\left[sen\dfrac{\pi}{a}x + \pi\cos\dfrac{\pi}{a}x\right] & \xi \leqslant x \leqslant a \end{cases}$$

Podemos apreciar que nuestra función de Green es invariante respecto al cambio de x por ξ gracias a la simetría. Por lo tanto $G(x,\xi) = G(\xi,x)$.