GRUPO 2: Fernando, Carlos y Ángel

PROBLEMA 6 – HOJA 1

Encuentra la función de Green en forma cerrada del problema de Sturm-Liouville singular:

$$\boldsymbol{xy" + y' - \frac{4}{x}y = f(x), \quad x \geq 1,}$$

$$\boldsymbol{y(1) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} y(x) = finito}$$

Halla $\boldsymbol{y(x)}$ si $\boldsymbol{f(x) = 1/x}$

Comparando la ecuación diferencial de nuestro problema con la expresión del problema de Sturm-Liouville inhomogéneo:

$$\begin{cases} xy" + y' - \dfrac{4}{x}y = f(x) \\ p(x)y" + p'(x)y' + (\mu r(x) - s(x))y = f(x) \end{cases}$$

se deduce que: $p(x) = x,\ s(x) = 0,\ r(x) = -4/x\ ,\ \mu = 1$

Aceptando que $G(x,\xi)$ es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada, entonces se cumple que:

$$xG" + G' - \frac{4}{x}G = \delta(x - \xi) = 0, \qquad x \neq \xi$$

Resolvemos esta ecuación diferencial multiplicando por *x* toda la ecuación, obteniéndose así una ecuación diferencial de Euler:

$$x^2G" + xG' - 4G = 0 \qquad (1)$$

Haciendo el cambio de variables: $x = e^t$

tendremos que:

$$\frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial t} = e^{-t}\frac{\partial G}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-t}\frac{\partial G}{\partial t}\right) = \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t}\frac{\partial G}{\partial t}\right) = e^{-t}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t}\frac{\partial G}{\partial t}\right) = e^{-t}\left(-e^{-t}\frac{\partial G}{\partial t} + e^{-t}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right)$$

$$= e^{-2t}\left(-\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = e^{-2t}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial G}{\partial t}\right)$$

Sustituyendo valores en la ecuación (1) resulta que:

$$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}-\frac{\partial G}{\partial t}\right)+e^{t}e^{-t}\frac{\partial G}{\partial t}-4G=0\Rightarrow\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}-4G=0$$

Por lo tanto:

$$G"-4G=0$$

De su ecuación característica:

$$x^2-4=0\Rightarrow x=\pm 2$$

obtenemos que sus raíces son reales y distintas; por lo tanto, la solución es de la forma:

$$G(t,\xi)=A(\xi)e^{2t}+B(\xi)e^{-2t}$$

Y deshaciendo el cambio tendremos:

$$G(x,\xi)=A(\xi)x^2+B(\xi)x^{-2}$$

Luego, nuestra función de Green tendrá la forma:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}A(\xi)x^2+B(\xi)x^{-2}, & 1\le x<\xi\\ C(\xi)x^2+D(\xi)x^{-2}, & \xi<x<\infty\end{cases}$$

Aplicamos las condiciones de contorno:

- $G(1,\xi)=0\Rightarrow\quad A(\xi)+B(\xi)=0\Rightarrow A(\xi)=-B(\xi)$
- $\lim_{x\to\infty}G(x,\xi)=finito\Rightarrow\quad C(\xi)\lim_{x\to\infty}x^2+D(\xi)\lim\limits_{x\to\infty}x^{-2}=finito\Rightarrow C(\xi)=0$

Por lo tanto, la función de Green se reduce a:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}A(\xi)(x^2-x^{-2}), & 1\le x<\xi\\ D(\xi)x^{-2}, & \xi<x<\infty\end{cases}$$

Aplicamos ahora las propiedades de la función de Green para obtener los valores de $A(\xi)$ y $D(\xi)$:

- Continuidad en $x=\xi$:
$$G(\xi^-,\xi)=G(\xi^+,\xi)\Rightarrow\quad A(\xi^2-\xi^{-2})=D\,\xi^{-2};\qquad (2)$$
- Salto en la derivada:
$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi^+}-\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi^-}=\frac{1}{p(\xi)}=\frac{1}{\xi}$$

  Así pues:
$$-2D\xi^{-3}-(2A\xi+2A\xi^{-3})=\frac{1}{\xi}\Rightarrow-2D\xi^{-2}-2A\xi^2-2A\xi^{-2}=1$$
$$\Rightarrow 2D\xi^{-2}+2A(\xi^2+\xi^{-2})=-1;\qquad (3)$$

De las ecuaciones (2) y (3) resulta que:

$$\begin{cases} A(\xi^2 - \xi^{-2}) = D\,\xi^{-2} \\ 2D\xi^{-2} + 2A(\xi^2 + \xi^{-2}) = -1 \end{cases} \Rightarrow 2A(\xi^2 - \xi^{-2}) + 2A(\xi^2 + \xi^{-2}) = -1 \Rightarrow A(\xi) = -\frac{1}{4\xi^2}$$

luego:

$$-\frac{1}{4\xi^2}(\xi^2 - \xi^{-2}) = D\,\xi^{-2} \Rightarrow D(\xi) = -\frac{1}{4}(\xi^2 - \xi^{-2})$$

Por lo tanto, la función de Green asociada a nuestro problema de Sturm-Liouville será:

$$\boxed{G(x,\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{4\xi^2}(x^2 - \frac{1}{x^2}), & 1 \le x < \xi \\ -\frac{1}{4x^2}\left(\xi^2 - \frac{1}{\xi^2}\right), & \xi < x < \infty \end{cases}}$$

- Cuando *f(x) = 1/x* , la solución de nuestro problema de Sturm-Liouville viene dada por:

$$y(x) = \int_1^\infty G(x,\xi)\, f(\xi) d\xi = \int_1^x G(x,\xi)\,\xi^{-1} d\xi + \int_x^\infty G(x,\xi)\,\xi^{-1} d\xi =$$

$$\int_1^x -\frac{1}{4x^2}\left(\xi^2 - \frac{1}{\xi^2}\right)\frac{1}{\xi} d\xi + \int_x^\infty -\frac{1}{4\xi^2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{\xi} d\xi =$$

$$-\frac{1}{4x^2}\int_1^x \left(\xi - \frac{1}{\xi^3}\right) d\xi - \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\int_x^\infty \frac{1}{\xi^3} d\xi =$$

$$-\frac{1}{4x^2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} - 1\right) - \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{2x^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{4}(\frac{1}{x^2} - 1)}$$