MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

REALIZADO POR:

Clara Gómez García

María Jesús Macías Castillo

Noelia Solís Preciado

Juan Villa Morales

Nº 10. Hallar la solución de la ecuación diferencial no homogénea

$$y'' + k^2\,[1 + a\delta(x)]y = F_0\,, \quad a, F_0 = ctes, \quad -L \leq x \leq L,$$

sujeta a las condiciones de contorno $y(-L) = y(L) = 0$, ***expresándola como combinación lineal de funciones de un conjunto completo.***

Identificamos con la ecuación de Sturm-Liouville:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - s(x)y + \lambda r(x)y = 0$$

Donde,

$\mathcal{L} \equiv \frac{d^2}{dx^2}$

$r(x)$=$1 + a\delta(x)$

$\lambda = k^2$

$\lambda_n = k_n^2$

Para resolver este problema lo primero que tenemos que hacer es calcular la ecuación homogénea y, para ello, obtener los autovalores y autofunciones a partir de los cuales se halla la función de Green.

Siendo la familia de autovalores y autofunciones $\{\lambda_n\}$, $\{\psi_n\}$, la función de Green es:

$$G(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\xi)\psi_n(x)}{\lambda - \lambda_n}$$

A partir de la cual hallamos la solución de la inhomogénea en el intervalo [-L, L] mediante:

$$y = \int_{-L}^{+L} d\,\xi\ G\ (x,\xi) f(\xi)$$

siendo $f(\xi)$ en este problema F_0.

Así pues, partiendo del ejercicio nº 4, contábamos con dos posibilidades para obtener las autofunciones:

Por las condiciones de continuidad en x=0:

$$A\ sen\ k_n\ L = B\ sen\ k_n\ L$$

Para que se cumpla la igualdad, tenemos dos casos:

CASO 1:

A= -B con k_n ≡ arbitrario con $k_n = \frac{\gamma_n}{L}$

(γ_n ≡ raíces de la ecuación transcendental: $tg\ \gamma_n = \frac{2L}{\gamma_n}$)

$$\psi_n = \begin{cases} A_n\ sen\ \gamma_n\ \left(\frac{x}{L} + 1\right);\ -L \leq x \leq 0 \\ -A_n\ sen\ \gamma_n\ \left(\frac{x}{L} - 1\right);\ 0\ \leq x\ \leq L \end{cases}$$

donde $A_n = [L\left(1 + \frac{a}{2L} sen^2\gamma_n\right)]$

CASO 2:

sen $k_m L$ *= 0* para A,B arbitrario con $k_m = \frac{m\,\pi}{L}$ donde *m* =1,2,3..

$$\psi_m = \begin{cases} A_m\ sen\ m\pi\ \left(\frac{x}{L} + 1\right);\ -L \leq x \leq 0 \\ -A_m\ sen\ m\pi\ \left(\frac{x}{L} - 1\right);\ 0\ \leq x\ \leq L \end{cases}$$

donde $A_m = \frac{1}{\sqrt{L}}$

Ambas autofunciones ya están normalizadas.

Construimos ya la función de Green:

$$G(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\xi)\ \psi_n(x)}{\lambda-\lambda_n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\psi_m(\xi)\ \psi_m(x)}{\lambda-\lambda_m}$$

donde ψ_n y ψ_m son las autofunciones indicadas anteriormente.

Llevando esto a la ecuación hallada en teoría siguiente:

$$y = \int_{-L}^{L} d\xi\ G(x,\xi)\ f(\xi)$$

Como tenemos dos tipos de autofunciones debido a los dos casos posibles mencionados, la solución nos queda de la forma:

$$y(x) = F_0 \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_n(x)}{\lambda-\lambda_n} \int_{-L}^{+L} d\xi\ \psi_n(\xi) + \frac{\psi_m(x)}{\lambda-\lambda_m} \int_{-L}^{+L} d\xi\ \psi_m(\xi)\ \right]$$

$$y(x) = F_0 \sum_{n,m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\psi_n(x) A_n}{K^2 - \left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^2} \left[\int_{-L}^{0} d\xi\ sen\ \gamma_n \left(\frac{\xi}{L}+1\right) - \int_{0}^{+L} d\xi\ sen\ \gamma_n \left(\frac{\xi}{L}-1\right) \right] + \frac{\psi_m(x) A_m}{K^2 - \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2} \left[\int_{-L}^{0} d\xi\ sen\ m\pi(\frac{\xi}{L}+1) - \int_{0}^{+L} d\xi\ sen\ m\pi(\frac{\xi}{L}-1) \right] \right\}$$

Para simplificar la expresión de la integral denotamos:

$C_n = \frac{A_n}{K^2-\left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^2}$

$D_m = \frac{A_m}{K^2-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}$

como son constantes, las podemos sacar de la integral.

Resolviendo la integral

$$y(x) = F_0 \sum_{n,m=1}^{\infty} \left\{ C_n \psi_n(x) \left[\int_{-L}^{0} d\xi \;\; sen\, \gamma_n \left(\frac{\xi}{L} + 1\right) - \int_{0}^{+L} d\xi \; sen\, \gamma_n \left(\frac{\xi}{L} - 1\right) \right] \right.$$

$$\left. + \; D_m \, \psi_m(x) \left[\int_{-L}^{0} d\xi \; sen\; m\pi \left(\frac{\xi}{L} + 1\right) - \int_{0}^{+L} d\xi \;\; sen\; m\pi (\frac{\xi}{L} - 1) \right] \right\}$$

Para resolver estas integrales debemos hacer un cambio de variables:

$$\int_{-L}^{0} d\xi \;\; sen\, \gamma_n \left(\frac{\xi}{L} + 1\right) \Rightarrow el\ cambio\ de\ variables\ sería \begin{Bmatrix} x = \gamma_n \left(\frac{\xi}{L} + 1\right) \\ dx = \gamma_n \, \frac{d\xi}{L} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{L}{\gamma_n} \int_{0}^{\gamma_n} dx \; senx = \; -\frac{L}{\gamma_n} \cos x \Big]_{0}^{\gamma_n} \; = \frac{L}{\gamma_n} (1 - cos\gamma_n)$$

$$\int_{0}^{+L} d\xi \; sen\, \gamma_n \left(\frac{\xi}{L} - 1\right) \Rightarrow el\ cambio\ de\ variables\ sería \begin{Bmatrix} x = \gamma_n \left(\frac{\xi}{L} - 1\right) \\ dx = \gamma_n \, \frac{d\xi}{L} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{L}{\gamma_n} \int_{-\gamma_n}^{0} dx \; senx = \frac{L}{\gamma_n} \int_{0}^{\gamma_n} dx \; senx = \; -\frac{L}{\gamma_n} \cos x \Big]_{0}^{\gamma_n} \; = \frac{L}{\gamma_n} (1 - cos\gamma_n)$$

En esta integral se ha tenido en cuenta la paridad de la función.

Estas dos integrales podemos simplificarlas sumándolas:

$$\int_{-L}^{0} d\xi \;\; sen\, \gamma_n \left(\frac{\xi}{L} + 1\right) + \int_{0}^{+L} d\xi \; sen\, \gamma_n \left(\frac{\xi}{L} - 1\right) = \frac{2L}{\gamma_n} (1 - cos\gamma_n)$$

Con respecto a las integrales de $\psi_m(\xi)$:

$$\int_{-L}^{0} d\xi \; sen\; m\pi \left(\frac{\xi}{L} + 1\right) \Rightarrow el\ cambio\ de\ variables\ sería \begin{Bmatrix} x = m\pi \left(\frac{\xi}{L} + 1\right) \\ dx = m\pi \frac{d\xi}{L} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{L}{m\pi} \int_{0}^{m\pi} dx \; senx = \; -\frac{L}{m\pi} \cos x \Big]_{0}^{m\pi} \; = \frac{L}{m\pi} [(-1)^{m+1} + 1]$$

$$\int_0^{+L} d\xi \;\; sen\, m\pi\left(\frac{\xi}{L}-1\right) \Rightarrow el\ cambio\ de\ variables\ sería \begin{Bmatrix} x = m\pi\left(\frac{\xi}{L}-1\right) \\ dx = m\pi\frac{d\xi}{L} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{L}{m\pi}\int_{-m\pi}^{0} dx\ senx = \frac{L}{m\pi}\int_{0}^{m\pi} dx\ senx = \ -\frac{L}{m\pi}\cos x\Big]_0^{m\pi} = \frac{L}{m\pi}[(-1)^{m+1}+1]$$

De nuevo, sumando estas dos expresiones nos queda:

$$\int_{-L}^{0} d\xi\ sen\, m\pi\left(\frac{\xi}{L}+1\right) + \int_{0}^{+L} d\xi\ sen\, m\pi\left(\frac{\xi}{L}-1\right) = \frac{2L}{m\pi}[(-1)^{m+1}+1]$$

Luego, la solución de la ecuación diferencial inhomogénea:

$$y(x) = \ 2LF_0 \sum_{n,m=1}^{\infty}\left\{C_n\,\psi_n(x)\left[\frac{1}{\gamma_n}(1-cos\gamma_n)\right] \ + D_m\,\psi_m(x)\left[\frac{1}{m\pi}[(-1)^{m+1}+1]\right]\right\}$$

En la solución se puede observar que para el sumatorio de la m, los términos pares se anulan todos, al ser $[(-1)^{m+1}+1]$, entonces sólo nos quedaríamos con los impares, pero también se observa que para los términos impares del sumatorio es la misma constante siempre:

$$\frac{1}{m\pi}[(-1)^{m+1}+1] = \frac{2}{m\pi}, para\ m\ impar$$

Luego la solución nos quedaría:

$$y(x) = \ 2LF_0 \sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n\,\psi_n(x)\left[\frac{1}{\gamma_n}(1-cos\gamma_n)\right] \right\} + \frac{4}{m\pi}LF_0\sum_{m=1}^{\infty} \ D_m\,\psi_m(x)$$